

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

## Cap. 9. Cenni sui meccanismi di trasmissione del calore

*Paolo Di Marco*

*Nicola Forgione*

Versione 2010.01 – 26.10.2010.

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## Introduzione

Nel capitolo 1 è stato introdotto il concetto di calore scambiato da un sistema. Il secondo principio della termodinamica asserisce, tra l'altro, che tale scambio avviene spontaneamente da un corpo a temperatura più alta ad uno a temperatura più bassa. La termodinamica tuttavia non ci dà nessuna ulteriore informazione: in particolare non spiega le modalità con cui tale scambio avviene, né determina il tempo necessario per lo scambio stesso. Tali problemi sono l'oggetto di una disciplina tecnica detta *Trasmissione del Calore*.

Lo scopo della Trasmissione del Calore è descrivere quantitativamente le modalità con cui la differenza di temperatura tra due corpi regola lo scambio di calore tra di essi. Queste conoscenze sono indispensabili per determinare il tempo in cui si compiono le trasformazioni termodinamiche: infatti in termodinamica lo scambio di calore e di lavoro dipende solo dalle trasformazioni del sistema e non dal tempo in cui il sistema evolve: a parità di trasformazioni, il calore ed il lavoro scambiati sono gli stessi sia che la evoluzione del sistema avvenga in un millisecondo che in un milione di anni. Le conoscenze di trasmissione del calore sono anche indispensabili per risolvere altri problemi tecnici: ad es. controllo di temperatura in impianti industriali, isolamento termico di macchinari ed edifici, raffreddamento efficiente delle macchine.

Una parte importante della trasmissione del calore riguarda lo studio dello scambio termico nella persona umana e delle condizioni ambientali per le quali l'uomo si trova in stato di benessere. Essa verrà trattata nel Cap.14.

E' necessario richiamare la definizione esatta di due grandezze che verranno usate nel seguito:

- *Flusso termico totale o potenza termica* (inglese: *heat rate* o *heat flow*) ( $W_T$  o  $\dot{Q}$ ): il calore trasmesso attraverso una superficie per unità di tempo [W];
- *Flusso termico specifico o semplicemente flusso termico* (inglese: *heat flux*) ( $q''$ ): il calore trasmesso attraverso una superficie per unità di tempo e di superficie [W/m<sup>2</sup>].

Sia il flusso termico che il flusso termico specifico sono caratterizzati anche da una direzione ed un verso, e sono quindi quantità vettoriali. In particolare, come vedremo meglio in seguito, esiste una certa analogia tra il flusso termico e la densità di corrente (quantità di carica elettrica che attraversa una superficie per unità di tempo e superficie).

## Modalità di scambio termico

Da un punto di vista tecnico, le modalità con cui il calore si trasmette possono essere raggruppate in tre categorie fondamentali:

- **Conduzione**: la trasmissione di calore nei corpi materiali, non associata a spostamento di materia. E' l'unica modalità di trasmissione del calore possibile all'interno dei solidi opachi (ovvero che non vengono attraversati da radiazioni elettromagnetiche).
- **Convezione**: la trasmissione di calore nei corpi materiali, associata a spostamento di materia. In genere, è il meccanismo di scambio termico predominante nei fluidi.
- **Irraggiamento**: la trasmissione di calore associata alla propagazione della radiazione elettromagnetica. E' l'unica modalità di trasferimento di calore possibile nel vuoto.

Ad esempio, il calore si trasmette per conduzione all'interno di una barra di ferro, o di una parete di una casa. Alla superficie di tali corpi, che sono in generale lambiti da un fluido (l'aria) lo scambio termico avviene principalmente per convezione. Il sole trasmette invece calore alla terra (e a noi stessi), attraverso lo spazio vuoto, per irraggiamento; ma riceviamo

calore con tale modalità anche quando siamo di fronte ad un corpo molto caldo (un fuoco o la bocca di una fornace); basta tuttavia l'interposizione di uno schermo opaco per sopprimere tale trasferimento: non per nulla quando abbiamo caldo ci spostiamo all'ombra.

Dal punto di vista fisico, invece, le modalità fondamentali di scambio termico sono solo conduzione e irraggiamento, che avvengono secondo le leggi fisiche specifiche esposte nel seguito (postulato di Fourier, legge di Stefan-Boltzmann); la convezione è invece una modalità complessa di trasporto di energia, predicibile (in teoria) tramite le altre leggi fisiche, ma che non è regolata da alcuna legge fisica particolare.

La Tab.1 riassume le modalità di trasmissione del calore che sono possibili nei mezzi solidi, fluidi e nel vuoto.

	Conduzione	Convezione	Irraggiamento
Mezzi solidi	SI	NO	SI <i>se trasparenti</i>
Mezzi fluidi	SI	SI	SI <i>se trasparenti</i>
Vuoto	NO	NO	SI

**Tabella 1:** meccanismi di trasmissione del calore nei vari mezzi.

## La conduzione

La conduzione può essere pensata come trasferimento di energia a livello microscopico per interazione tra le particelle più energetiche (dotate di energia vibrazionale) a quelle meno energetiche. In regime monodimensionale, in cui la temperatura  $T$  è funzione della sola  $x$ , il flusso termico (calore trasmesso per unità di tempo e superficie) che attraversa una qualunque superficie perpendicolare all'asse  $x$  è dato dal postulato di Fourier, che per una lastra piana è esprimibile come:

$$q''_x = -k \frac{dT}{dx} \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad 9.1$$

notare il segno meno, in accordo con il secondo principio della termodinamica (il calore fluisce verso le zone più fredde).

Nel caso di andamento tridimensionale di temperatura il flusso termico è un vettore (caratterizzato quindi da direzione e verso oltre che dal modulo) esprimibile come

$$\vec{q}'' = -k \text{ grad } T \quad 9.2$$

Il fattore di proporzionalità  $k$  [W/m K] è detto conducibilità termica ed è una proprietà fisica della sostanza: le sostanze con alto valore di  $k$  sono buoni *conduttori termici* (ovvero trasmettono elevati flussi termici con piccoli gradienti di temperatura) e quelle con basso  $k$  sono detti *isolanti termici* e sono usati per coibentare termicamente le strutture. Il valore di  $k$  è in generale funzione della temperatura, ma tale dipendenza può essere trascurata nella maggior parte dei casi. Alcuni valori di  $k$  per i materiali più comuni sono riportati in Tab.2.

### *Analoga tra conduzione elettrica e termica*

La Eq.9.2 presenta notevoli analogie con l'equazione della densità di corrente elettrica

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \text{grad} V$$

9.3

entrambi i fenomeni sono infatti *fenomeni diffusivi*: la propagazione di una determinata quantità (calore o corrente nel nostro caso) è legata da una costante al gradiente della stessa quantità o di un'altra (temperatura o potenziale nel caso in questione). In particolare è da notare l'analogia tra la conducibilità elettrica  $\sigma$  e la conducibilità termica  $k$ : così come i buoni conduttori elettrici (alto valore di  $\sigma$ ) consentono il passaggio di corrente con piccole differenze di potenziale, analogamente ci saranno buoni conduttori termici, caratterizzati da un alto valore di  $k$  che consentono il passaggio di calore con limitate differenze di temperatura. Al contrario, dovendo isolare termicamente un ambiente si ricorrerà ad isolanti termici (basso valore di  $k$ ) così come per l'isolamento elettrico si ricorre a materiali con basso valore di  $\sigma$ .

Generalmente i buoni conduttori elettrici, ovvero i metalli, sono anche buoni conduttori termici e viceversa. Fanno eccezione alcuni materiali ceramici ed il diamante, che hanno buona conducibilità termica ma bassa conducibilità elettrica, che si usano quindi per ottenere un buon isolamento elettrico senza pregiudicare lo smaltimento termico.

<b>Materiale</b>	$k$ [W/m K]
Diamante	2300
Rame	400
Alluminio	240
Acciaio al C	40 - 60
Acciaio inox	15
Nitrato di boro	15
Lana di vetro	0.04
Vetro	1 - 1.5
Mattoni	0.7
Acqua	0.6
Gas	0.02 - 0.2

**Tabella 2:** valori indicativi della conducibilità termica  $k$  per alcuni materiali.

Applicheremo ora, tramite alcuni esempi, il postulato di Fourier (Eq.9.2) per calcolare l'andamento della temperatura all'interno di un solido opaco, ove, per quanto detto in precedenza, l'unico meccanismo di scambio termico possibile è la conduzione. In questi esempi ci ricaveremo caso per caso il bilancio energetico del corpo nella particolare forma che ci sarà più utile. Il lettore più attento potrà verificare che tali bilanci energetici non sono che casi particolari di una equazione più generale, l'*equazione della conduzione o di Fourier*, la cui derivazione viene illustrata in Appendice 9-1.

E' necessario porre particolare attenzione nell'evitare di confondere il *postulato di Fourier*, Eq.9.2 con la *equazione di Fourier*, riportata in appendice 9-1, che invece non è altro che il bilancio di energia in un corpo solido all'interno del quale è applicabile il postulato di Fourier.

### **ESEMPIO 9.1 - Conduzione stazionaria in una lastra piana**

Sia data una lastra piana di acciaio al C, di spessore  $s = 3$  cm e superficie  $A = 4$  m<sup>2</sup> (dato che l'altezza e la larghezza sono molto maggiori dello spessore, la temperatura si può considerare funzione della sola  $x$ ). La lastra si trova in condizioni stazionarie con le due superfici rispettivamente a  $T_1 = 300$  °C e  $T_2 = 25$  °C. Determinare il flusso termico totale attraverso la lastra stessa.

Non è difficile convincersi che il flusso termico totale attraverso una qualunque superficie della lastra parallela alle facce deve essere costante. Infatti ogni sistema delimitato da due qualunque di tali superfici è in condizioni stazionarie e quindi, dato che siamo in assenza di lavoro, la potenza termica che entra da destra deve essere uguale a quello che esce da sinistra, ovvero

$$-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_a} = -k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_b} \quad \forall x_a, x_b \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \text{cost} = \frac{T_2 - T_1}{s}$$

dove si è sfruttato il fatto che in una lastra  $A$  non dipende da  $x$ . Conseguentemente (con  $k$  ricavato dalla Tab.2) si ha

$$W_T = -k A \frac{T_2 - T_1}{s} = 40 \cdot 4 \frac{300 - 25}{0.03} = 1.47 \text{ MW}$$

è da notare che il flusso termico totale è proporzionale alla differenza di temperatura tra le facce. Si può stabilire un'analogia tra una resistenza elettrica  $R$  ai cui capi ci sono le tensioni  $V_1$  e  $V_2$ , che è attraversata da una corrente  $I$  e la lastra in questione, ai cui capi ci sono le temperature  $T_1$  e  $T_2$ , che è attraversata da un flusso termico  $W_T$ . La "resistenza termica" si misura in [K/W] ed è data da

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{s}{kA}$$

Come approccio alternativo si può considerare l'applicazione della equazione di Fourier al nostro problema, che porta a

$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = \text{cost}$$

da cui, moltiplicando per  $kA$ , si arriva alla formulazione da cui siamo partiti in questo esempio.

□

### **ESEMPIO 9.2 - Conduzione stazionaria in una parete cilindrica**

Sia data una tubazione di rame, di spessore  $s = 1$  mm, diametro esterno  $D = 12$  mm e lunghezza  $L = 0.4$  m. Il tubo si trova in condizioni stazionarie con le due superfici rispettivamente a  $T_1 = 28$  °C e  $T_2 = 25$  °C. Determinare il flusso termico totale attraverso il tubo.

Se si trascura il calore uscente dai due estremi del tubo, non è difficile convincersi che il flusso termico totale attraverso una qualunque superficie cilindrica interna al tubo e coassiale alle facce deve essere costante. Infatti ogni sistema delimitato da due qualunque di tali superfici è in condizioni stazionarie, e quindi, dato che siamo in assenza di lavoro, il calore che entra da destra deve essere uguale a quello che esce da sinistra. E' da notare che, a differenza del caso della lastra piana, il fatto che  $W_T$  sia costante non implica che  $q''$  sia costante, perché le due superfici hanno area diversa. In termini matematici

$$W_T(r) = \text{cost} = W_T$$

$$q''(r) A(r) = W_T$$

$$2q''(r) \pi r L = W_T$$

$$r q''(r) = \frac{W_T}{2 \pi L}$$

e sfruttando il postulato di Fourier  $q'' = -k dT/dr$

$$-r k \frac{dT}{dr} = \frac{W_T}{2 \pi L}$$

in definitiva si ottiene un problema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} \frac{dT}{dr} = -\frac{W_T}{2 \pi k r L} \\ T(r_1) = T_1 \end{cases}$$

la cui soluzione vale

$$T(r) = T_1 - \frac{W_T}{2 \pi k L} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

ovviamente il valore di  $W_T$  è ancora incognito, ma può essere determinato sfruttando la condizione non ancora utilizzata  $T(r_2) = T_2$

$$W_T = 2 \pi k L \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

da cui, assunto  $k = 400 \text{ W/m K}$  (vedi tabella 2) si ha

$$W_T = 2 \pi \cdot 400 \cdot 0.4 \frac{28 - 25}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)} = 16.5 \text{ kW}$$

in questo caso la resistenza termica (definita come nell'esempio della lastra piana), vale

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \pi k L} = \frac{r_2 - r_1}{k A_m} \quad \text{dove}$$

$$A_m = 2\pi r_m L, \quad r_m = \frac{r_2 - r_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

ed  $r_m$  è detto anche *raggio medio logaritmico*; per piccoli valori del rapporto tra spessore e raggio, coincide praticamente con il raggio medio aritmetico.

Molto spesso nelle corpi cilindrici, come le tubazioni, si fa riferimento al flusso termico per unità di lunghezza,  $q'$  [W/m], dato da

$$q' = \frac{W_T}{L} = 2\pi k \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = 41.35 \text{ kW/m}$$

Se il materiale fosse stato vetro ( $k=1$  W/m K) anziché rame il calore scambiato sarebbe stato circa 400 volte minore: la verifica è lasciata per esercizio all'allievo.

In alternativa, l'applicazione della equazione di Fourier al nostro problema deve tener conto che il laplaciano va espresso in coordinate cilindriche, e porta a

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r \frac{dT}{dr} = \text{cost}$$

che, una volta espressa opportunamente la costante, è analoga alla formulazione iniziale di questo esempio.

In definitiva, cosa distingue la conduzione in un guscio cilindrico da quella in una lastra piana? Il fatto che nel cilindro la superficie attraversata dal calore cresce con il raggio dello stesso, mentre nella lastra piana la superficie rimane costante. Ne segue che quando lo spessore della tubazione è piccolo rispetto al raggio, la variazione di superficie è trascurabile e si può utilizzare anche per i cilindri l'espressione più semplice valida per le lastre piane. Nella pratica, questo è del tutto accettabile per spessori minori di un decimo del raggio. L'allievo può verificare che, applicando l'espressione della lastra piana al caso in questione (utilizzando il valore dell'area della superficie esterna della tubazione), si ottiene una potenza termica pari a 18.1 kW.

□

### ***ESEMPIO 9.3 - Conduzione stazionaria con generazione di calore: filo percorso da corrente elettrica***

Un conduttore di rame di sezione cilindrica, con diametro  $D = 2$  mm, lunghezza  $L = 2$  m e conducibilità termica  $k_c = 400$  W/(m K), è percorso da una corrente elettrica di densità  $j = 15$  A/mm<sup>2</sup>. La resistività elettrica del rame vale  $\rho_e = 17.2$  nΩm. Il conduttore è ricoperto da un isolante plastico di spessore  $s = 0.5$  mm e conducibilità termica  $k_i = 0.5$  W/(m K). La superficie esterna dell'isolante si trova alla temperatura di  $T_e = 60$  °C. Si determini:

1. la temperatura all'interfaccia rame-isolante;
2. la distribuzione di temperatura al suo interno del rame.

Supponiamo che la temperatura dipenda unicamente dal raggio e non dalla coordinata assiale, il che è giustificato dal fatto che il corpo ha una lunghezza molto maggiore del diametro e la quantità di calore uscente dalle sue basi è trascurabile.

La prima parte del problema può essere facilmente risolta aiutandosi con il risultato del precedente ESEMPIO 9.2. Infatti, detti  $r_i$  ed  $r_e$  i raggi interno ed esterno dello strato isolante

$$T_i - T_e = W_T R_T = W_T \frac{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi k_i L}$$

La potenza termica dissipata è facilmente calcolabile come

$$W_T = R_e I^2 = \rho_e \frac{L}{A} j^2 A^2 = \rho_e j^2 V = \rho_e j^2 \pi r_i^2 L = 17.2 \cdot 10^{-9} \cdot (15 \cdot 10^6)^2 \cdot \pi \cdot 0.001^2 \cdot 2 = 24.3 \text{ W}$$

Sostituendo nella precedente si ha

$$T_i = T_e + \frac{W_T}{2\pi k_i L} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = T_e + \frac{\rho_e j^2 \cancel{r_i^2} \cancel{L}}{2 \cancel{k_i} \cancel{L}} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = 61.570^\circ\text{C}$$

Per quanto riguarda la temperatura nel rame, scriviamo il bilancio di energia per un cilindro di raggio generico  $r$  centrato rispetto all'asse imponendo che, a regime, la potenza dissipata per effetto Joule sia pari a quella asportata per conduzione alla superficie laterale del cilindro:

$$q'' A_L = W_T(r) = \rho_e j^2 \pi r^2 L$$

$$-k_c \frac{dT}{dr} 2\pi r L = \rho_e j^2 \pi r^2 L$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\rho_e j^2}{2k_c} r$$

Quest'ultima costituisce una equazione differenziale lineare del primo ordine, che deve essere risolta associandola alla condizione al contorno  $T(r_i) = T_i$ . Notiamo per inciso (e con sollievo, viste le ipotesi fatte) che l'andamento di temperatura non dipende dalla lunghezza del filo,  $L$ . Notiamo anche che in questo caso il flusso termico non è costante, ma cresce proporzionalmente al raggio.

Separando le variabili e procedendo con l'integrazione (dal raggio generico  $r$  al raggio esterno del conduttore  $r_i$ ) abbiamo

$$\int_T^{T_i} dT = - \int_r^{r_i} \frac{\rho_e j^2}{2k_c} r dr$$

$$T - T_i = \frac{\rho_e j^2}{4k_c} (r_i^2 - r^2)$$

E quindi la temperatura nel cilindro ha andamento parabolico. In particolare, il valore massimo sull'asse del cilindro vale

$$T_c = T_i + \frac{\rho_e j^2}{4k_c} r_i^2 = 61.572^\circ\text{C}$$

Il suo valore differisce di pochissimo da  $T_i$  data la grande conducibilità termica del rame. Notiamo infine che definendo il flusso termico lineare come

$$q' = \frac{W_T}{L} = \rho_e j^2 \pi r_i^2$$

L'espressione della temperatura massima nel cilindro di rame possa essere scritta come

$$T_c = T_i + \frac{q'}{4\pi k_c}$$

e che quindi essa dipende unicamente dal valore del flusso termico lineare e non dal raggio del conduttore di rame.

Si potrebbe pensare che lo strato esterno di isolante di un conduttore, necessario dal punto di vista elettrico, sia un ostacolo dal punto di vista termico in quanto fa aumentare la temperatura del conduttore stesso. Mentre questo è sicuramente vero nel caso in questione, in cui la temperatura esterna dell'isolante è imposta, non è necessariamente così nel caso in cui all'esterno dell'isolante ci sia un fluido che asporta calore per convezione. In questo caso, infatti, per particolari valori dello spessore, l'aumento di resistenza termica dovuto allo spessore di isolante è più che compensato dall'aumento della superficie di scambio convettiva esterna. Si veda in merito l'appendice 9-4 che tratta il *raggio critico di isolamento*.



## L'irraggiamento

Nell'irraggiamento, il calore è trasportato dalle onde elettromagnetiche che tutti i corpi (solidi, liquidi o gassosi) emettono ed assorbono come risultato di cambiamenti nella configurazione elettronica degli atomi di cui sono composti.

La *radiazione elettromagnetica* può essere vista sotto il duplice aspetto di fenomeno *ondulatorio* (sistemi di campi elettromagnetici variabili che si propagano nello spazio) o *particellare* (propagazione di particelle, dette *fotoni*). Se si assume il modello ondulatorio, la radiazione elettromagnetica viene emessa in uno spettro continuo di lunghezze d'onda che vanno dalle onde radio (lunghezza d'onda da 10 km a 1 m) fino alla radiazione gamma (lunghezze d'onda di  $10^{-4}$  nm). Lo *spettro visibile* è quella sezione dello spettro elettromagnetico a cui è sensibile la retina dell'occhio umano (circa 400÷700 nm). Le radiazioni di lunghezza d'onda immediatamente al di sotto della finestra visibile sono dette raggi *infrarossi*; quelle immediatamente al di sopra *ultravioletti*.

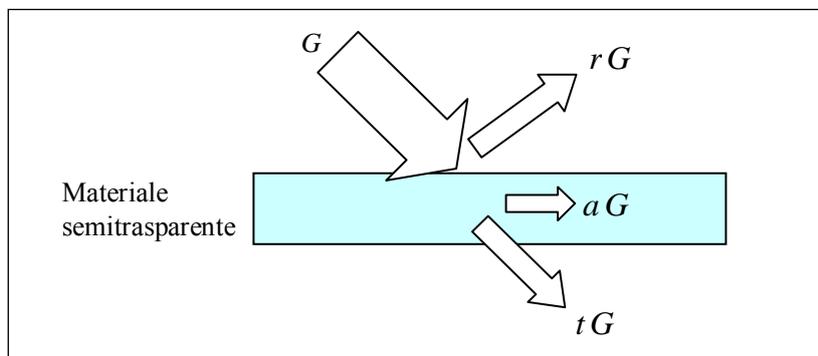
La *radiazione termica* è localizzata principalmente nelle lunghezze d'onda dell'*infrarosso*. Nonostante ciò, se un corpo viene riscaldato a temperatura sufficiente, esso emette una frazione significativa di energia anche alle lunghezze d'onda dello spettro visibile (sole, filamento delle lampadine). Come già accennato, visto che le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto, questa è l'unica modalità di trasmissione di calore possibile nel vuoto stesso.

Oltre ad emettere radiazione, i corpi interagiscono con le radiazioni incidenti su di loro ed emesse dagli altri corpi circostanti. Vediamo le modalità di tali interazioni.

### *Radiazione incidente*

La radiazione incidente su di una superficie per unità di area e di tempo è detta *irradiazione* e si indica generalmente con  $G$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]. Quando la radiazione incide su di una superficie parte di essa viene assorbita, parte riflessa e la restante parte, se c'è, viene trasmessa (v. Fig.1). La somma delle frazioni di radiazione assorbita ( $a \equiv G_{\text{ass}}/G$ ), riflessa ( $r \equiv G_{\text{rif}}/G$ ) e trasmessa ( $t \equiv G_{\text{tr}}/G$ ) è unitaria ( $a+r+t=1$ ). I tre rapporti prendono il nome di coefficiente di assorbimento ( $a$ ), riflessione o rinvio ( $r$ ) e trasparenza ( $t$ ). Nei *corpi opachi* il coefficiente di trasparenza è nullo, come avviene frequentemente, per spessori anche modesti, nei materiali solidi. In questo caso la radiazione può essere solo assorbita e/o riflessa.

Quando in un corpo opaco si annulla anche il coefficiente di riflessione, il coefficiente di assorbimento è unitario; tutta la radiazione che colpisce il corpo viene assorbita: il corpo viene detto *corpo nero*.



**Figura 1:** interazione della radiazione con un corpo materiale.

I coefficienti di assorbimento e di rinvio possono variare con la lunghezza d'onda: questo rende ragione del diverso *colore* delle superfici: una superficie verde rinvia la maggior parte della radiazione verde incidente, mentre assorbe le radiazioni rosse e blu.

**Radiazione emessa: leggi di Stefan-Boltzmann, Planck e Kirchoff.**

Benché si tratti di un'idealizzazione, mai perfettamente realizzata in natura, il corpo nero è un modello di riferimento per analizzare anche la potenza emessa per radiazione.

Un corpo nero infatti, oltre ad assorbire tutta la radiazione incidente, indipendentemente dalla lunghezza d'onda o dalla direzione, *emette* anche una potenza termica radiante per unità di area, detta *potere emissivo del corpo nero* ( $E_n$ ) data dalla *legge di Stefan-Boltzmann* (1879):

$$E_n = \sigma T^4 \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad 9.4$$

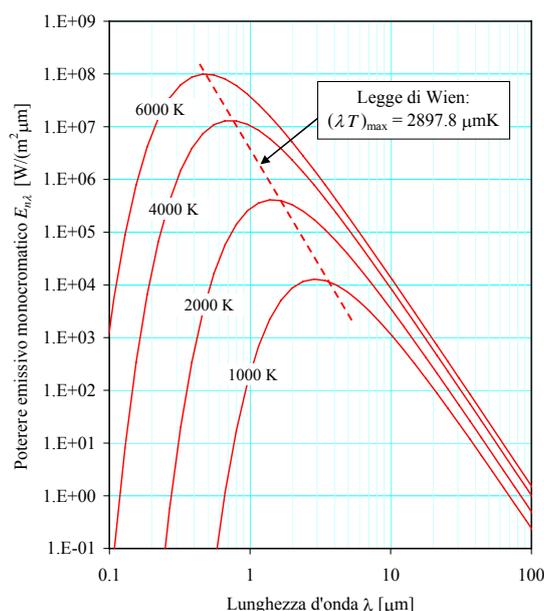
dove  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$  è la *costante di Stefan-Boltzmann* e  $T$  la temperatura assoluta della superficie, in kelvin.

Se si vogliono avere informazioni, oltre che sull'energia emessa, anche sulla lunghezza d'onda delle radiazioni elettromagnetiche emesse dal corpo, bisogna esaminare il *potere emissivo monocromatico del corpo nero* ( $E_{n\lambda}$ ). Esso rappresenta la potenza emessa dal corpo nero alla temperatura  $T$  per unità di superficie e per unità di lunghezza d'onda intorno a  $\lambda$ .

Il suo valore è dato dalla *legge di Planck* (1900):

$$E_{n\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[ e^{(C_2/\lambda T)} - 1 \right]} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \right] \quad 9.5$$

dove  $C_1 = 3.742 \cdot 10^8 \text{ W } \mu\text{m}^4/\text{m}^2$  e  $C_2 = 1.439 \cdot 10^4 \text{ } \mu\text{m K}$ . In Fig. 2 è riportata la variazione di  $E_{n\lambda}$  con la lunghezza d'onda per quattro differenti valori della temperatura. Ovviamente, l'integrale su tutto lo spettro delle lunghezze d'onda del potere emissivo monocromatico del corpo nero fornirà come risultato il potere emissivo totale (Eq. 9.4).



**Figura 2:** potere emissivo monocromatico del corpo nero per alcune temperature.

La forma della curva di figura 2 rende ragione del fatto che un corpo riscaldato emette luce visibile di colore che varia con la temperatura: infatti, al crescere della temperatura il massimo della lunghezza d'onda della radiazione emessa si sposta dall'infrarosso (in cui la radiazione non è visibile al nostro occhio) nel visibile, a partire dal rosso, poi dal giallo ed infine dal blu. Essa rende ragione anche del fatto che le stelle hanno colore diverso a seconda della loro temperatura superficiale: il nostro Sole, la cui superficie è a circa 6000 K ha il massimo di emissione a 500 nm, ovvero nel giallo.

Si può dimostrare che, data una certa temperatura, il corpo nero presenta la massima emissione per radiazione tra tutti i corpi. Un corpo non nero alla stessa temperatura presenta un potere emissivo monocromatico:

$$E_{\lambda} = \varepsilon(\lambda) E_{n\lambda} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \right] \quad 9.6$$

dove  $\varepsilon$  (epsilon) è un parametro caratteristico della superficie, detto *emissività*, il cui valore è compreso tra 0 ed 1 e dipende generalmente da vari fattori, tra cui in particolare la lunghezza d'onda della radiazione emessa od assorbita.

La *legge di Kirchoff* asserisce (in forma semplificata) che per tutti i corpi si ha  $\varepsilon = a$ . In pratica questo vuol dire che i buoni assorbitori sono anche buoni emettitori: in particolare il corpo nero, oltre ad essere un perfetto assorbitore, è anche un perfetto emettitore. Inoltre essa implica che le superfici opache possono essere caratterizzate tramite un unico parametro ovvero l'*emissività* (essendo per tali superfici  $\varepsilon = a$ ,  $t=0$ ,  $r=1-\varepsilon$ ).

Infine, per una particolare classe di corpi detti *corpi grigi*, il coefficiente di assorbimento  $a$  (e quindi anche la emissività) sono *indipendenti dalla lunghezza d'onda*.

### **Scambio termico per irraggiamento**

Lo scambio netto di calore per irraggiamento tra due corpi è il risultato del bilancio tra la radiazione emessa dall'uno che viene assorbita dall'altro e viceversa; la sua determinazione coinvolge la valutazione dei *fattori di vista*, che dipendono puramente dalle proprietà

geometriche delle superfici coinvolte, e la conoscenza delle caratteristiche di assorbimento e/o riflessione dei due corpi (proprietà radiative). Il fattore di vista tra una superficie  $i$  ed una superficie  $j$ ,  $F_{i \rightarrow j}$ , è la frazione della radiazione emessa dalla superficie  $i$  che incide direttamente sulla superficie  $j$ . I fattori di vista, per particolari geometrie, sono riportate in forma analitica in tabelle o in forma grafica.

Una volta introdotti i fattori di vista, nel caso di due corpi neri ( $i$  e  $j$ ) risulta immediato il calcolo della potenza termica *netta* trasmessa per irraggiamento, data dalla relazione:

$$W_T = F_{i \rightarrow j} A_i \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad [W] \quad 9.7$$

I fattori di vista godono di alcune proprietà, tra cui in particolare quella di reciprocità per cui si ha  $A_i F_{i \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow i}$

Nel caso di superfici non nere il calcolo risulta notevolmente più complesso a causa dei *rinvii*, ovvero dell'energia emessa dalle superfici che, per effetto della riflessione da parte delle altre superfici, torna a colpire la superficie di partenza (per i corpi neri questo problema non si pone in quanto essi hanno coefficiente di riflessione  $r$  nullo). Una classe di superfici non nere particolarmente utili nelle applicazioni pratiche sono le superfici *grigie* (proprietà radiative indipendenti dalla lunghezza d'onda), *diffondenti* (proprietà radiative indipendenti dalla direzione) ed *opache* ( $t = 0$ ). In Tab.3 sono riportate le formule per il calcolo della potenza termica scambiata tra due *superfici grigie, diffondenti ed opache* (è necessario che presentino *tutte* le caratteristiche suddette) in quattro differenti configurazioni geometriche.

Ci limiteremo nel seguito a considerare il caso semplice di un corpo relativamente piccolo a temperatura  $T_1$  contenuto in una grande cavità a temperatura  $T_2$  (es. il filamento di una lampadina contenuto in una stanza) il flusso termico scambiato per irraggiamento è dato da (v. Tab. 3):

$$W_T = \varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [W] \quad 9.8$$

dove  $\varepsilon_1$  ed  $A_1$  sono riferiti alla superficie del corpo interno alla cavità. E' da notare che la legge di trasmissione del calore per irraggiamento non è lineare nella temperatura, e questo complica molto i relativi calcoli.

Si può ricondurre in forma approssimata la legge precedente ad una lineare

$$W_T = \alpha_R A_1 (T_1 - T_2) \quad , \quad \alpha_R = \varepsilon_1 \sigma (T_1 + T_2) (T_1^2 + T_2^2) \quad 9.9$$

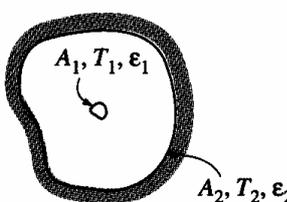
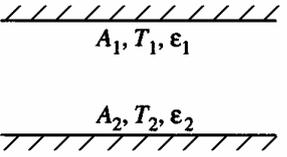
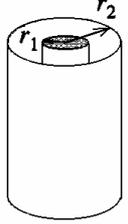
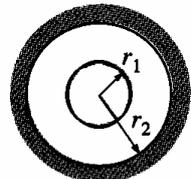
dove si nota che dipende anche dalla temperatura. In geometrie più complesse,  $\alpha_R$  dipende ovviamente anche dai fattori di vista, v. Eq.9.7.

La *resistenza termica per irraggiamento* vale quindi

$$R_T = \frac{1}{\alpha_R A_1} \quad 9.10$$

In generale quando è presente convezione forzata, il calore trasmesso per irraggiamento è trascurabile per temperature delle superfici inferiori a 500 °C. In caso di modalità di convezione scarsamente efficienti, l'irraggiamento acquista importanza: ad esempio un normale termosifone domestico emette circa il 30% del calore per irraggiamento ed il rimanente 70% per convezione. In una stanza dalle pareti più fredde (es. perché esposta a

nord), a parità di temperatura dell'aria, abbiamo più freddo a causa dell'irraggiamento tra il nostro corpo ed i muri.

<p>Piccolo oggetto in una grande cavità</p> 	$\frac{A_1}{A_2} \approx 0$ $F_{12} = 1$	$W_t = A_1 \sigma \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$
<p>Piastre parallele infinitamente larghe</p> 	$A_1 = A_2 = A$ $F_{12} = 1$	$W_t = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$
<p>Cilindri concentrici infinitamente lunghi</p> 	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2}$ $F_{12} = 1$	$W_t = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$
<p>Sfere concentriche</p> 	$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ $F_{12} = 1$	$W_t = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$

**Tabella 3:** potenza termica scambiata tra due superfici grigie diffondenti ed opache in alcune particolari configurazioni.

**ESEMPIO 9.4 - Irraggiamento**

Il filamento di una lampadina ha una superficie  $A = 15.7 \text{ mm}^2$  ed una emissività  $\varepsilon = 0.9$ . Esso è contenuto in un globo di vetro di superficie molto maggiore che si trova alla temperatura di  $80 \text{ }^\circ\text{C}$ . Dentro il globo è stato fatto il vuoto. Determinare la potenza elettrica che è necessario fornire al filamento perché esso si mantenga alla temperatura di  $2700 \text{ }^\circ\text{C}$ .

☞ *La soluzione è riportata nel file C9LAMP.XLS*

Non essendoci alcun mezzo fisico interposto tra il filamento ed il vetro, l'unica modalità di scambio termico possibile è l'irraggiamento. Essendo il filamento di superficie molto più piccola del suo contenitore, il problema si risolve con la equazione:

$$W_T = \varepsilon_f A_f \sigma (T_f^4 - T_v^4)$$

dove gli indici  $f$  e  $v$  si riferiscono rispettivamente al filo ed al vetro. Quindi

$$W_T = 0.91 \cdot 15.7 \cdot 10^{-6} \cdot 5.67 \times 10^{-8} (2973^4 - 353^4) = 63 \text{ W}$$

Notare che in questo caso è *indispensabile* esprimere le temperature in kelvin. Da rimarcare anche che il risultato è poco sensibile al valore della temperatura del vetro (a causa della presenza delle quarte potenze).

**La convezione**

La convezione (dal latino *conveho*, "trasporto insieme") è la modalità di scambio termico che si ha alla superficie di un solido lambito da un fluido per l'effetto combinato della conduzione nel fluido e del trasporto di energia associato allo spostamento di materia, dovuto al moto del fluido stesso. E' da notare che perché si abbia convezione è *necessario che il fluido sia in moto*: nei fluidi in quiete la trasmissione del calore avviene per conduzione (ed irraggiamento se il fluido è trasparente).

Dal punto di vista pratico la convezione può essere classificata in

- *Convezione naturale*: quando il moto del fluido è dovuto alle differenze di densità indotte dalle differenze di temperatura (ad esempio, un fluido più caldo, essendo più leggero, tende generalmente a salire): è il caso ad esempio dell'acqua in una pentola posta sul fuoco, o dell'aria sull'asfalto caldo;
  - *convezione forzata*: quando il moto relativo tra il fluido e la superficie è indotto dall'esterno tramite appositi organi (in genere, pompe o ventilatori);
- ed, indipendentemente, anche in:
- *convezione interna*: quando il fluido scorre internamente ad un condotto (in genere una tubazione) in modo tale che la presenza della parete provoca effetti sul moto dell'intero fluido;
  - *convezione esterna*: quando il fluido lambisce dall'esterno un oggetto (es. l'ala di un aereo, la pala di una turbina), ed, a sufficiente distanza da esso, non risente dell'influenza della parete stessa.

Inoltre la convezione, sia forzata che naturale, può essere *monofase* o *con cambio di fase*: quando il fluido cambia fase (evapora o condensa) a contatto della superficie.

Per calcolare il flusso termico trasmesso per convezione è necessario risolvere contemporaneamente le equazioni differenziali del moto (di Navier-Stokes) e del trasporto di energia nel fluido: un problema matematico formidabile, che a tutt'oggi è stato risolto solo in pochi casi semplici. Pertanto si ricorre generalmente a determinazioni sperimentali.

Il flusso termico per convezione è esprimibile mediante l'espressione *empirica* (anch'essa dovuta originariamente a Fourier, che sviluppò una precedente osservazione di Newton):

$$q'' = \alpha (T_s - T_r) \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad 9.11$$

dove  $T_s$  rappresenta la temperatura della superficie.  $T_r$  è invece un'opportuna temperatura di riferimento del fluido: più precisamente, in caso di convezione *esterna*,  $T_r$  è data dal valore asintotico che la temperatura raggiunge a sufficiente distanza dalla superficie e che non è influenzato dalla presenza della superficie stessa; in caso di convezione *interna*  $T_r$  è la cosiddetta *temperatura di miscela* (ovvero un'opportuna media della temperatura nella sezione trasversale del condotto, che ne conserva il contenuto medio entalpico).

Nella Eq.9.11 si considera positivo il flusso termico *uscende* dalla superficie. Per uniformarsi alle convenzioni adottate in termodinamica, ovvero che il calore è positivo quando *entra* nel sistema, in alcuni casi è necessario aggiungere un segno negativo nella Eq.9.11 (in particolare, quando il sistema è costituito dalla parete solida e l'esterno dal liquido che lo lambisce).

Il coefficiente  $\alpha$  [W/m<sup>2</sup> K] è detto *coefficiente di convezione*, e (al contrario di  $k$ ) *non è solo una proprietà del fluido*: esso è un coefficiente empirico che incorpora gli effetti dovuti alla natura del fluido, al campo di velocità in prossimità della superficie, alla geometria del sistema. Quanto più  $\alpha$  è elevato, tanto maggiore è lo scambio termico convettivo (ovviamente, a parità di differenza di temperatura).

Riflettendo attentamente, ci si può rendere conto che l'Eq.9.11, ben lungi dall'essere una legge fisica, è semplicemente la definizione di  $\alpha$ .

Noi tutti sappiamo per esperienza che *in generale* lo scambio termico in convezione forzata (e quindi il valore di  $\alpha$ ) è maggiore che in convezione naturale (per questo soffiato sulla minestra e la rimescoliamo col cucchiaino per raffreddarla) e che i liquidi asportano calore per convezione meglio dei gas (per questo stiamo bene in aria a 20°C e abbiamo freddo se immersi in acqua alla stessa temperatura). Alcuni valori indicativi di  $\alpha$  per i casi più comuni sono riportati in Tabella 4.

	Liquidi	Gas
Convezione naturale	50 - 2 000	2 - 25
Convezione forzata	100 - 20 000	25 - 250
Convezione con cambio di fase (ebollizione, condensazione)	2 500 - 100 000	

**Tabella 4:** valori indicativi di  $\alpha$  [W/m<sup>2</sup> K] per i casi più comuni.

**ESEMPIO 9.5 – Valutazione della temperatura superficiale di un corpo.**

Una stufa avente superficie esposta all'aria  $A = 1.5 \text{ m}^2$  dissipa nell'ambiente esterno una potenza termica  $W_t = 0.8 \text{ kW}$ . La stufa è circondata da aria calma, alla temperatura  $T_a = 20 \text{ °C}$ , per cui si può stimare un coefficiente di convezione naturale  $\alpha = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Valutare la temperatura della superficie della stufa.

Il problema si risolve semplicemente applicando l'Eq.9.11

$$q'' = \alpha (T_s - T_a) \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

da cui, considerando ai valori assoluti per liberarci dei problemi di segno

$$|W_t| = |q''| A = \alpha A (T_s - T_a)$$

$$T_s = \frac{|W_t|}{\alpha A} + T_a = \frac{800}{10 \cdot 1.5} + 20 = 73 \text{ °C}$$

Da notare che la temperatura della superficie della stufa eccede quella di sicurezza per un contatto accidentale, per cui la stessa andrebbe protetta opportunamente. L'allievo può verificare che in caso di convezione forzata ( $\alpha = 100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ) tale temperatura si ridurrebbe notevolmente.

Per completezza, aggiungiamo che non abbiamo considerato esplicitamente il contributo dello scambio termico dovuto all'irraggiamento (v. paragrafo successivo) che può essere molto significativo. Di esso si tiene in genere conto in modo semplificato maggiorando opportunamente il coefficiente di convezione.

Analogamente a quanto fatto per la conduzione negli Esempi 2-1 e 2-2, possiamo introdurre anche una resistenza termica convettiva, data da

$$R_T = \frac{T_s - T_a}{W_T} = \frac{1}{\alpha A}$$

□

**ESEMPIO 9.6 – Irraggiamento e convezione combinati**

Una termocoppia è situata sull'asse di un condotto metallico in cui scorre aria a  $T_a = 300 \text{ °C}$ , per misurarne la temperatura. Il rivestimento della termocoppia ha una emissività  $\varepsilon = 0.9$ . Le pareti della tubazione si trovano alla temperatura  $T_p = 600 \text{ °C}$ . Il coefficiente di convezione tra l'aria e la termocoppia vale  $\alpha = 200 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Determinare la temperatura misurata dalla termocoppia.

 *La soluzione è riportata nel file C2TCMEAS.XLS*

Dato che la termocoppia è a regime, il suo scambio termico globale deve essere nullo. In particolare, essa riceve calore per irraggiamento dalle pareti calde della tubazione e lo cede per convezione all'aria circostante. Detta quindi  $T$  la temperatura della termocoppia, si ha

$$q''_{irr} + q''_{conv} = 0$$

ed essendo la termocoppia stessa assimilabile ad un corpo molto piccolo contenuto entro uno molto grande (vedi Eq.9.8)

$$\varepsilon \sigma (T^4 - T_p^4) + \alpha (T - T_a) = 0$$

Il valore della temperatura della termocoppia si ottiene quindi risolvendo una equazione di quarto grado. Dato che essa non è risolvibile in forma chiusa, si può utilizzare un risolutore (es. tipo quelli implementati sulle calcolatrici portatili, od il risolutore di EXCEL) oppure il metodo cosiddetto di *tentativo ed errore*, illustrato nel seguito.

a) Si riarrangia l'equazione precedente nella forma:

$$\alpha (T - T_a) = \varepsilon \sigma (T_p^4 - T^4)$$

b) Si stima un valore di tentativo, ad esempio  $T^* = T_a$

c) Si sostituisce il valore di  $T^*$  a  $T$  nel membro destro

d) Si ottiene un nuovo valore di tentativo tramite

$$T^*_i = T_a + \frac{\varepsilon \sigma}{\alpha} (T_p^4 - T^{*4}_{i-1})$$

Si procede alternando c) e d) fino a quando le due stime successive non differiscono di una quantità trascurabile. I successivi valori ottenuti sono riportati nella tabella seguente.

$i$	$T^*(i)$ (K)	$T^*(i+1)$ (K)
1	573.00	693.76
2	693.76	662.14
3	662.14	672.21
4	672.21	669.16
5	669.16	670.10
6	670.10	669.81
7	669.81	669.90
8	669.90	669.87
9	669.87	669.88
10	669.88	

Si vede che il metodo converge in poche iterazioni. Tale metodo è di semplice applicazione e generalizzabile a molti altri problemi. Tuttavia la convergenza non è sempre assicurata (provare ad esempio con  $\alpha = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ).

Si nota anche che la temperatura misurata dalla termocoppia differisce sensibilmente da quella effettiva dell'aria. Questo esempio illustra come le misure di temperatura possano essere notevolmente falsate in presenza di irraggiamento con superfici più calde o più fredde del fluido.



### **Convezione forzata – determinazione di $\alpha$**

Come già detto, la determinazione di  $\alpha$  è nella maggior parte dei casi affidata all'esecuzione di esperimenti. Tali esperimenti hanno come risultato delle espressioni matematiche, dette *correlazioni di scambio termico*, che danno (generalmente in forma di gruppi adimensionali) il valore del coefficiente di convezione per determinate classi di fluidi, condizioni di moto e configurazioni geometriche. A solo titolo di esempio, si riporta una correlazione abbastanza famosa che fornisce il valore di  $\alpha$  per convezione forzata nel caso di moto a velocità

relativamente elevata (moto turbolento) di fluidi (tutti ad eccezione dei metalli liquidi) all'interno di condotti

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}$$

dove

$$Nu = \frac{\alpha D}{k} \tag{9.12}$$

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k}$$

e:

$D$  diametro idraulico del condotto;

$k$  conducibilità termica del fluido;

$w$  velocità del fluido;

$c_p$  calore specifico del fluido;

$\rho$  densità del fluido;

$\mu$  viscosità dinamica (una proprietà che esprime la resistenza del fluido allo scorrimento, misurata in Pa s).

Si può notare che i tre gruppi ( $Nu$ ,  $Re$ ,  $Pr$ ) che appaiono nell'Eq.9.12 sono *adimensionali*: essi sono detti rispettivamente *numeri di Nusselt*, *Reynolds* e *Prandtl* (rispettivamente da Willelm Nusselt, 1882-1957, Osborne Reynolds, 1842-1912, e Ludwig Prandtl, 1875-1953). Il numero di Reynolds viene considerato anche quando si trattano il moto e le perdite di carico nei condotti. Altre correlazioni di scambio termico sono riportate in Tab.6.

**ESEMPIO 9.7 - Calcolo del coefficiente di scambio convettivo in convezione forzata.**

In una tubazione di uno scambiatore di calore, di diametro interno 12 mm, scorre una portata  $G = 0.2$  kg/s di acqua alla temperatura di 20°C. Determinare il coefficiente di scambio convettivo utilizzando la correlazione 9.12.

 La soluzione è riportata nel file C9DITTUS.XLS

Le proprietà termofisiche dell'acqua a 20 °C sono ricavabili da un manuale

$k = 0.6$  W/m K;  $c_p = 4180$  J/kg K;  $\rho = 997$  kg/m<sup>3</sup>;  $\mu = 0.000978$  Pa s.

mentre la velocità va ricavata dalla portata

$$w = \frac{G}{\rho A} = \frac{G}{\rho \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0.2 \cdot 4}{997 \cdot \pi \cdot (0.012)^2} = 1.77 \text{ m/s}$$

A questo punto non resta che valutare i gruppi adimensionali  $Re$  e  $Pr$ ,

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu} = \frac{997 \cdot 1.77 \cdot 0.012}{0.000978} = 21698$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{4180 \cdot 0.000978}{0.6} = 6.81$$

da cui si ottiene il valore di  $Nu$

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} = 146$$

ed infine

$$\alpha = Nu \frac{k}{D} = \frac{146 \cdot 0.6}{0.012} = 7298 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Cambiando i dati, si può notare come il coefficiente di scambio aumenti con la portata del fluido e diminuisca con il diametro: tuttavia, come vedremo nei prossimi capitoli, agendo in questo modo si ottiene anche un notevole aumento delle perdite per attrito (perdite di carico) nella tubazione.



### **Convezione naturale – determinazione di $\alpha$**

In regime di convezione naturale, la velocità del fluido dipende dai moti indotti dalle differenze di densità e pertanto non è ben definita. Non ha quindi senso definire il numero di Reynolds, che viene sostituito dal *numero di Grashof* (da Franz Grashof, 1826-1893)

$$Gr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad 9.13$$

Dove, oltre alle grandezze definite in precedenza, compaiono

$\beta$  coefficiente di dilatazione termica del fluido,

$g$  accelerazione di gravità;

$T_s$  temperatura della parete;

$T_\infty$  temperatura del fluido imperturbato (a sufficiente distanza dalla parete);

$L$  dimensione lineare caratteristica della superficie (in genere, area/diametro).

E' da notare che  $Gr = 0$ , quindi non si ha convezione naturale, nel caso di fluido che non si dilata termicamente ( $\beta=0$ ) o in caso di assenza di gravità ( $g=0$ ). In entrambi i casi infatti viene a mancare la forza di galleggiamento che è responsabile del moto del fluido.

Per la natura stessa della convezione naturale, il coefficiente di scambio dipende quindi anche dalla temperatura della parete, il che rende il fenomeno non più linearmente dipendente da  $\Delta T$  e obbliga in molti casi ad una soluzione iterativa del problema. Una tipica correlazione di scambio termico in convezione naturale, valida per piastre orizzontali, ha la forma

$$Nu = 0.54 (Pr Gr)^{1/4} \quad 9.14$$

ed è valida per  $10^4 < Pr Gr < 10^7$ . Altre correlazioni sono riportate in Tab.6.

### **ESEMPIO 9.8 – Convezione naturale.**

Il processore di un personal computer ha la superficie superiore quadrata di lato  $a = 80$  mm; detta superficie deve mantenersi ad una temperatura massima di  $60^\circ\text{C}$ . Trascurando il contributo dell'irraggiamento, determinare la potenza termica massima che può essere smaltita attraverso tale superficie se il fluido circostante (aria) si trova alla temperatura di  $30^\circ\text{C}$ .

Le proprietà termofisiche dell'aria a  $30^\circ\text{C}$  sono ricavabili da un manuale:

$$k = 0.026 \text{ W/m K}; \rho = 1.165 \text{ kg/m}^3; \mu = 1.86 \times 10^{-5} \text{ Pa s}, \beta = 0.0033 \text{ K}^{-1}.$$

Inoltre, per tutti i gas si può ritenere con buona approssimazione  $Pr = 0.7$

Il numero di Grashof, avendo assunto  $L = A/P = a/4 = 0.02$  m, vale quindi

$$Gr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) \rho^2 L^3}{\mu^2} = \frac{9.81 \cdot 0.0033 \cdot (60 - 30) \cdot 1.165^2 \cdot 0.02^3}{(1.86 \cdot 10^{-5})^2} = 30480$$

essendo  $10^4 < Pr Gr < 10^7$ , si può utilizzare la Eq.9.14, da cui si ottiene il valore di  $Nu$

$$Nu = 0.54 (Pr Gr)^{1/4} = 0.54 (21336)^{1/4} = 6.5$$

ed infine

$$\alpha = Nu \frac{k}{D} = \frac{6.5 \cdot 0.026}{0.02} = 8.5 \text{ W/m}^2\text{K}$$

La potenza termica scambiata è data da

$$W_T = \alpha S (T_p - T_\infty) = 8.5 \cdot (0.08)^2 (60 - 30) = 1.63 \text{ W}$$

In caso che il chip debba dissipare una potenza maggiore è necessario aumentare la superficie di scambio dotandolo di alette (v. app.9-2) oppure passare alla convezione forzata aggiungendo una ventola. Da notare anche che è stato trascurato il contributo dell'irraggiamento, che in queste condizioni (in dipendenza dalla geometria del sistema) potrebbe superare il 30%.

□

### **Raccolta di correlazioni di scambio termico**

E' inutile imparare a memoria le correlazioni di scambio termico: esse si trovano in gran numero sui manuali ed hanno tutte una forma grossomodo analoga a quella della Eq.9.12 (anche se un po' più complessa, e talvolta contengono ulteriori gruppi adimensionali). In Tab.6 è riportato un sommario delle principali correlazioni di scambio termico per convezione. Ogni correlazione si riferisce ad un particolare tipo di convezione (es. convezione naturale, o forzata) e a determinate geometrie (es. tubazioni). Utilizzare le correlazioni al di fuori del loro campo di validità in genere porta ad errori molto gravi. L'uso delle correlazioni di scambio termico è illustrato negli esempi 9.7 e 9.8.

### **Convezione e conduzione combinate – scambio termico attraverso una parete**

Nei casi tecnici rilevanti, la convezione avviene in prossimità di una parete lambita da un fluido, ed è quindi spesso associata alla conduzione all'interno della parete stessa. Tale modalità composta di scambio termico è illustrata nell'esempio seguente.

#### **ESEMPIO 9.9 - Lastra piana lambita da due fluidi.**

Sia data una lastra piana di vetro ( $k = 1.5 \text{ W/m K}$ ), di spessore  $s = 5 \text{ mm}$  e superficie  $A = 0.5 \text{ m}^2$  (dato che l'altezza e la larghezza sono molto maggiori dello spessore, la temperatura si può considerare funzione della sola  $x$ ). La lastra si trova in condizioni stazionarie; sul lato sinistro è lambita da acqua a  $T_1 = 50 \text{ °C}$  e coefficiente di convezione  $\alpha_1 = 250 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , e su quello destro da aria a  $T_2 = 15 \text{ °C}$  e coefficiente di convezione  $\alpha_2 = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Determinare il flusso termico totale attraverso la lastra e la temperatura delle sue facce.

Dette  $T'$  e  $T''$  le temperature delle due facce della lastra, si ha che il flusso termico totale per conduzione al suo interno (vedi Es.2-1) è dato da

$$W_T = -k A \frac{dT}{dx} = k A \frac{T' - T''}{s}$$

il problema è risolto dal sistema di equazioni seguenti, nelle incognite  $T'$ ,  $T''$ ,  $W_T$ , dove si è assunto positivo il calore che fluisce verso destra (v. Fig.3)

$$\begin{cases} W_T = \alpha_1 A (T_1 - T') \\ W_T = k A \frac{T' - T''}{s} \\ W_T = \alpha_2 A (T'' - T_2) \end{cases}$$

in molti casi ha interesse eliminare  $T'$  e  $T''$  dalle equazioni di cui sopra per ottenere una relazione che lega direttamente  $W_T$  a  $T_1$  e  $T_2$ . Il problema è analogo a determinare la resistenza equivalente a tre resistenze elettriche in serie, in cui la temperatura è analoga alla tensione ed il flusso termico alla corrente (v. anche Es.2-1). Lo schema elettrico equivalente è riportato in Fig.4, dove le tre “resistenze termiche” (vedi Esempi 2-1 e 2-4) sono date da:

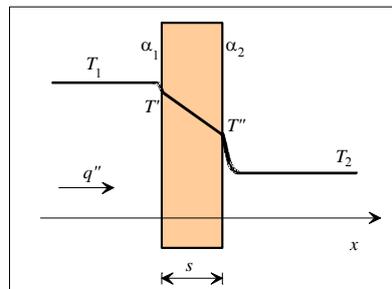
$$R_{t1} = \frac{1}{\alpha_1 A}, \quad R_{t2} = \frac{s}{k A}, \quad R_{t3} = \frac{1}{\alpha_2 A}$$

La soluzione è data da

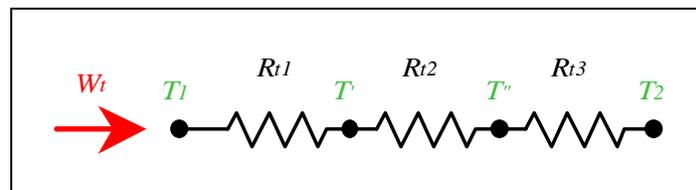
$$\begin{cases} W_T = \frac{T_1 - T_2}{R_T} \\ R_T = R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} \end{cases}$$

Nel nostro caso si ha:

$$R_T = \frac{1}{0.5 \cdot 250} + \frac{0.005}{0.5 \cdot 1.5} + \frac{1}{0.5 \cdot 10} = 0.215 \text{ K/W}$$



**Figura 3:** andamento qualitativo della temperatura in una lastra lambita da due fluidi.



**Figura 4:** Rete elettrica equivalente al fenomeno di scambio termico in una parete lambita da due fluidi.

E' da notare che, come spesso accade, uno solo dei tre addendi in parentesi prevale di uno o più ordini di grandezza sugli altri (nel caso in esame, il terzo); è del tutto inutile quindi determinare accuratamente i due rimanenti. Svolgendo i calcoli:

$$W_t = 163 \text{ W}$$

$$q'' = \frac{W_t}{A} = 326 \text{ W/m}^2$$

$$T' = T_1 - W_t R_{t1} = 48.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T'' = T_2 + W_t R_{t2} = 47.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

In questo caso quasi tutto il salto termico è localizzato alla superficie della lastra in contatto con il fluido di minore coefficiente di convezione, dove si ha la maggiore resistenza termica.

□

Nella tecnica si fa spesso riferimento al reciproco della resistenza termica  $R_T$ , che si indica con  $U$  ed è detta *conduttanza di parete*; detta grandezza si misura in [W/K]. Si usa spesso anche il *coefficiente globale di scambio*, o *conduttanza unitaria di parete*, già introdotto nel cap.1, che è riferito all'unità di superficie e vale quindi  $u = U/A$  e si misura in [W/m<sup>2</sup> K]. In sintesi, la relazione tra queste tre quantità è quindi

$$R_T = \frac{1}{U} = \frac{1}{u A}$$

Configurazione	Resistenza termica [K/W]	Note
Conduzione monodimensionale parete piana	$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{s}{kA}$	v. Esempio 2-1
Conduzione monodimensionale parete cilindrica	$R_T = \frac{r_2 - r_1}{kA_m}$ dove $A_m = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\ln(r_2 / r_1)} L$	v. Esempio 2-2 Per $r_2 - r_1 < 0.1 r_1$ la parete si può considerare piana.
Conduzione multidimensionale	$R_T = \frac{1}{k S}$	v. App.2-2
Convezione	$R_T = \frac{T_s - T_a}{W_T} = \frac{1}{\alpha A}$	v. Esempio 2-5
Convezione su superficie alettata	$R_T = \frac{1}{\alpha \eta_a A_{con}}$	v. App. 2-3
Irraggiamento (caso semplificato)	$R_T = \frac{1}{\alpha_R A_1}$	v. Eq.9.9

**Tabella 5:** valori della resistenza termica per i casi più comuni.

Il valore della resistenza termica nei casi più comuni è riportato in Tab.5. Nei manuali sono disponibili anche valori della resistenza termica per casi bidimensionali (es. tubazioni

interrate, spigoli di pareti). Nei casi più complessi, è necessario considerare reti di resistenze termiche in serie ed in parallelo, che possono essere risolte tramite i metodi appresi in elettrotecnica. Nell'esempio che segue facciamo invece uso della conduttanza di parete.

Il concetto di resistenza termica non è applicabile nei casi in cui si ha generazione interna di calore, limitatamente alle zone dove tale generazione non è nulla: si veda in merito l'ESEMPIO 9.3.

**ESEMPIO 9.10 – Perdite termiche da una tubazione.**

In una tubazione di acciaio inossidabile ( $k = 16 \text{ W/m K}$ ), di spessore  $s = 5 \text{ mm}$  e diametro esterno  $D = 40 \text{ mm}$ , di lunghezza  $L = 10 \text{ m}$ , scorre vapore saturo a temperatura  $T_1 = 300 \text{ °C}$ , con coefficiente di convezione  $\alpha_1 = 5000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . La tubazione si trova in condizioni stazionarie, e sul lato esterno è lambita da aria a  $T_2 = 20 \text{ °C}$  e coefficiente di convezione  $\alpha_2 = 15 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Determinare la perdita di calore dalla tubazione (ovvero, il flusso termico totale).

Dato che la tubazione è molto più lunga del suo diametro e non vi sono disuniformità circonferenziali, la temperatura può essere considerata funzione unicamente del raggio. Il problema si può risolvere determinando la conduttanza di parete dalle tre resistenze termiche in serie (vedi Esempi 2-2 e 2-8 e Tab.5):

$$\begin{cases} W_T = U (T_1 - T_2) \\ U = (R_{t1} + R_{t2} + R_{t3})^{-1} = \left( \frac{1}{A_1 \alpha_1} + \frac{s}{A_m k} + \frac{1}{A_2 \alpha_2} \right)^{-1} \end{cases}$$

notare che in questo caso, a causa della geometria cilindrica, le aree di scambio che compaiono nelle tre resistenze termiche sono diverse. In particolare

$$\begin{cases} A_1 = \pi (D - 2s)L = 0.94 \text{ m}^2 \\ A_m = 2\pi \frac{s}{\ln\left(\frac{D}{D-2s}\right)} L = 1.09 \text{ m}^2 \\ A_2 = \pi D L = 1.26 \text{ m}^2 \end{cases}$$

si ha quindi

$$U = \left( \frac{1}{0.94 \cdot 5000} + \frac{0.005}{1.09 \cdot 16} + \frac{1}{1.26 \cdot 15} \right)^{-1} = 18.72 \text{ W/K}$$

$$W_T = 18.72 \cdot (300 - 20) = 5.24 \text{ kW}$$

□

CONFIGURAZIONE	LIMITI	CORRELAZIONE	RIFERIMENTI - NOTE
Convezione forzata interna Moto laminare Moto pienamente sviluppato	$Re < 2100$ $Pr > 0.7$ $L/D \gg 0.05 Re Pr$	$Nu = 3.66 \quad (T_s = const)$ $Nu = 4.36 \quad (q = const)$	Valore locale di Nu per moto pienamente sviluppato. Possono essere usate se il tubo e' molto lungo rispetto alla zona di imbocco e la viscosita' non varia molto con la temperatura. V. Incropera p.460.
Convezione forzata interna Moto laminare T parete costante	$Re < 2100$ $Pr > 0.7$	$Nu = 1.86 \left( \frac{Re Pr}{L/D} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14}$	Incropera p.460 $\mu$ viscosita' a T miscela ( $T_m$ ) $\mu_s$ viscosita' a T parete ( $T_s$ ) Raccomandata se: $(Re Pr D/L)^{1/3} (\mu/\mu_s)^{0.14} > 2$
Convezione forzata interna Moto turbolento Condotti lunghi	$Re > 6000$ $Pr > 0.7$ $L/D > 10$	$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.33}$ (Precisione del 25%)	Incropera p.445, Lienhard p.323. Esistono correlazioni piu' complesse con precisioni migliori del 10%.
Convezione forzata interna Moto turbolento Condotti lunghi	$Re > 10000$ $0.6 < Pr < 160$ $L/D > 10$	$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$ $n = 0.4$ per $T_s > T_m$ $n = 0.3$ per $T_s < T_m$	Incropera p.445.
Convezione forzata interna Metalli liquidi	$Pr < 0.1$	$Nu = 4.0 + 0.025(Re Pr)^{0.8} \quad (T_s = const)$ $Nu = 5.0 + 0.025(Re Pr)^{0.8} \quad (q = const)$	
Convezione forzata esterna Cilindro in "crossflow" (ovvero investito da una corrente infinita perpendicolare al suo asse)	$2 \cdot 10^4 < Re < 4 \cdot 10^5$ $Re Pr > 0.2$	$Nu = 0.3 + \left\{ 0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3} \left[ 1 + (0.4/Pr)^{2/3} \right]^{1/4} \right\} \left[ 1 + (Re/282000)^{5/8} \right]^{4/5}$ (Precisione del 20%)	Incropera p.395, Lienhard p.329. Precisione migliore se divisa in piu' parti.
Convezione naturale Piastra verticale	$Gr_L > 10^9$	$Nu = 0.13 (Pr Gr_L)^{1/3}$	Kreith p.394.
Convezione naturale Piastra verticale	$Pr Gr_L < 10^4$	$Nu = \left\{ 0.825 + \frac{0.387(Pr Gr_L)^{1/6}}{\left[ 1 + (0.492/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	Incropera p.493.
Convezione naturale Piastra orizzontale Moto laminare Superficie superiore di piastra calda o inferiore di piastra fredda	$10^4 < Pr Gr_L < 10^7$	$Nu = 0.54 (Pr Gr_L)^{1/4}$	Incropera p.498 $Gr_L \equiv \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2}$ $\beta$ = coeff. di dilatazione termica $L$ = area / perimetro
Convezione naturale Piastra orizzontale Moto turbolento Superficie superiore di piastra calda o inferiore di piastra fredda	$10^7 < Pr Gr_L < 10^{11}$	$Nu = 0.15 (Pr Gr_L)^{1/3}$	v. sopra
Convezione naturale Piastra orizzontale Superficie inferiore di piastra calda o superiore di piastra fredda	$10^5 < Pr Gr_L < 10^{10}$	$Nu = 0.27 (Pr Gr_L)^{1/4}$	v. sopra
Convezione naturale Cilindro orizzontale	$10^{-5} < Pr Gr_D < 10^{12}$	$Nu = \left\{ 0.60 + \frac{0.387(Pr Gr_D)^{1/6}}{\left[ 1 + (0.559/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	Incropera p.502. Per $10^3 < Gr_D < 10^9$ si puo' usare: $Nu = 0.53 (Pr Gr_D)^{1/4}$ (v. Kreith p.396)
Convezione naturale Cilindro verticale	$D/L \geq (35/Gr_L^{1/4})$	Usare la correlazione per piastre verticali	Incropera p.494. Correlazioni piu' accurate, V. Lienhard p.360.

NOTE: Se non specificato altrimenti, le proprieta' fisiche devono essere valutate alla temperatura del  $T_f = (T_r + T_s) / 2$ . La  $T_r$  e' la temperatura all'infinito per flussi esterni, mentre per flussi interni e' la temperatura di miscela.

**Tabella 6:** principali correlazioni di scambio termico per convezione.

## BIBLIOGRAFIA

Per approfondimenti sulla trasmissione del calore si può consultare:

- Y.A. Cengel, Termodinamica e Trasmissione del Calore, 3° ed., McGraw-Hill, 2009, capp. 12-20.

Inoltre esistono numerosi testi italiani ed inglesi dedicati esclusivamente alla trasmissione del calore. Tra essi si citano

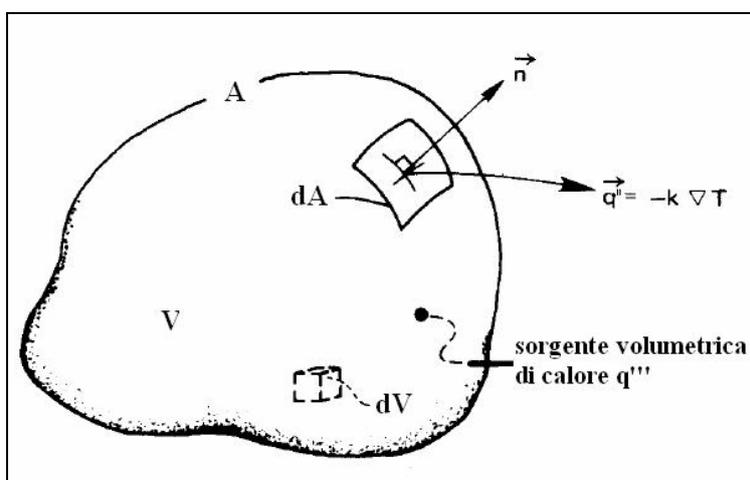
- G. Guglielmini, C. Pisoni, Elementi di Trasmissione del Calore, Veschi, 1990.
- A. Bejan, Heat Transfer, Wiley, 1993.
- F.P. Incropera, D.P. De Witt, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, Wiley, 1996.
- A.F. Mills, Basic heat and mass transfer, Irwin, 1995.

### Appendice 9-1 – L'equazione di Fourier (o della conduzione)

Il punto di partenza dell'analisi di un problema di conduzione del calore è l'equazione di bilancio dell'energia ricavata per un sistema chiuso il cui volume è  $V$ . Nel caso di un solido incompressibile ( $\rho = \text{costante}$  e  $du = c dT$ ) con un termine fittizio di produzione dell'energia (dovuto ad esempio all'effetto Joule) si ha

$$\frac{dU}{dt} = W_T + W_{gen} \quad 9.1$$

dove la potenza meccanica scambiata con l'esterno è stata posta nulla in virtù del fatto che il sistema è indeformabile ed indilatabile.



**Figura A1-1:** Generico volume di controllo al cui interno si ha scambio termico per conduzione.

Il termine fittizio dovuto alla generazione interna di calore può essere posto nella forma

$$W_{gen} = \int_V q''' dV \quad 9.2)$$

Posto inoltre che il solido sia isotropo ( $k$  indipendente dalla direzione) si ha che la potenza termica scambiata per conduzione attraverso la superficie  $A$  del volume di controllo  $V$  vale, in base al postulato di Fourier

$$W_T = - \int_A \vec{q}'' \cdot \vec{n} dA = - \int_A (-k \text{ grad } T) \cdot \vec{n} dA \quad 9.3$$

Sfruttando il teorema della divergenza (noto dall'elettrostatica) l'equazione precedente assume la seguente forma:

$$W_T = \int_V [\text{div} \cdot (k \text{ grad } T)] dV \quad 9.4$$

Il rateo di variazione dell'energia interna che compare a primo membro dell'eq. 9.1 si può, invece, scrivere come:

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad 9.5$$

Dove è necessario rammentare che in generale  $dU = c_v dT + B_u dv$  ed abbiamo supposto che nel solido avvenga una trasformazione a volume costante<sup>1</sup> e  $c_v = c$ .

Inserendo i risultati ottenuti nelle eqq. 9.2, 9.4 e 9.5 nell'eq. 9.1 si ricava:

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_V [\text{div}(k \text{ grad } T) + q'''] dV \quad 9.6$$

L'uguaglianza tra i due integrali di volume, dovendo valere per un generico volume  $V$ , si estende quindi anche alle funzioni integrande fornendo così la ben nota *equazione di Fourier*:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } T) + q''' \quad 9.7$$

Per problemi di conduzione per i quali non c'è generazione interna di calore e la conducibilità termica ed il calore specifico possono essere assunti costanti, il bilancio dell'energia si semplifica nella:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T \quad 9.8$$

Per problemi di conduzione nello stato stazionario con generazione interna di calore e con conducibilità termica costante il bilancio dell'energia può essere scritto come:

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = 0 \quad 9.9$$

Un'equazioni di questa forma in matematica è detta *equazione di Poisson*.

Infine per problemi di conduzione nello stato stazionario senza conversione di energia interna e con conducibilità termica costante l'equazione di bilancio dell'energia assume la seguente forma:

$$\nabla^2 T = 0 \quad 9.10$$

che in matematica è detta *equazione di Laplace*. Queste ultime due equazioni sono analoghe a quelle per la determinazione di un campo potenziale elettrico in presenza di carica libera (Eq.9.9 o meno (Eq.9.10), e questa analogia può, in alcuni casi, essere utilizzata per ottenere la soluzione di problemi di conduzione.

---

<sup>1</sup> In luogo di una trasformazione a volume costante si potrebbe considerare una trasformazione isobara, e questo porterebbe a dover considerare il  $c_p$  in luogo di  $c_v$ , si veda ad esempio il testo di Bejan. Per i solidi, come è noto, la differenza tra  $c_p$  e  $c_v$  è trascurabile.

### Condizioni iniziali ed al contorno per l'equazione di Fourier

L'analisi di un problema della conduzione coinvolge la soluzione dell'appropriata forma dell'equazione di bilancio dell'energia, la quale in generale deve essere associata ad opportune condizioni iniziali (valori di temperatura all'istante iniziale, solo per problemi transitori) ed al contorno (alla superficie del volume, per qualunque problema sia stazionario che transitorio).

#### Condizione iniziale

Nel caso generale di un problema di conduzione in transitorio è necessario conoscere in un certo istante temporale, che si assume come istante iniziale, la distribuzione di temperatura nel dominio  $V$  di integrazione:

$$T(\vec{r}, t = 0) = T_0(\vec{r}) \quad \vec{r} \in V \quad 9.11$$

La soluzione dell'equazione della conduzione dovrà quindi fornire la distribuzione di temperatura in ogni istante successivo.

#### Condizione al contorno del primo tipo (o condizione di Dirichlet)

In questo caso è nota la distribuzione di temperatura sulla superficie  $S$  del dominio  $V$  sul quale andare ad integrare l'equazione della conduzione, cioè:

$$T = f(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in A \quad 9.12$$

dove la prescritta temperatura superficiale  $f(\vec{r}, t)$  è in generale una funzione della posizione all'interno del dominio e del tempo. Nel caso particolare in cui

$$T = 0 \quad \vec{r} \in A \quad 9.13$$

si parla di condizione al contorno del primo tipo *omogenea*.

#### Condizione al contorno del secondo tipo (o condizione di Neumann)

Questo è il caso in cui è specificato il valore del flusso termico sulla superficie, cioè:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = f(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in A \quad 9.14$$

dove con  $\partial T / \partial n$  si è indicato il gradiente di temperatura valutato nella direzione normale (uscente) alla superficie. Nel caso particolare di flusso termico nullo sul contorno, ovvero di una superficie adiabatica, si ha:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \vec{r} \in A \quad 9.15$$

e si parla di condizione al contorno del secondo tipo *omogenea*.

#### Condizione al contorno del terzo tipo (o condizione di Robin o mista)

In questo caso si uguaglia sulla superficie del solido il flusso conduttivo proveniente dall'interno con quello asportato per convezione dal fluido che lo lambisce, ovvero

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha [T_\infty(\vec{r}, t) - T_0] \quad \vec{r} \in A \quad 9.16$$

L'eventuale termine dovuto all'irraggiamento viene trascurato o linearizzato (ovvero, inglobato nel coefficiente convettivo).

Ovviamente, le condizioni al contorno del primo e del secondo tipo possono essere ottenute come casi particolari della condizione al contorno del terzo tipo. Per esempio, ponendo in prossimità del contorno  $k=0$ , e  $T_\infty(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$  si ottiene (per  $\alpha \neq 0$ ) una condizione del primo tipo. Similmente, ponendo  $\alpha T_\infty(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$  e  $T_0 = 0$  al secondo membro si ottiene una condizione del secondo tipo.

## Appendice 9-2 – La conduzione in regime stazionario in strutture multidimensionali

In ogni sistema bidimensionale, nel quale del calore viene trasmesso da una superficie a temperatura costante  $T_1$  ad un'altra superficie a temperatura costante  $T_2$  di un corpo solido, la potenza termica scambiata dipende solo dalla differenza di temperatura ( $T_1 - T_2$ ), dalla conducibilità termica  $k$  del mezzo attraverso il quale avviene lo scambio termico e dalla forma geometrica del sistema. In particolare, la potenza termica scambiata tra queste due superfici può essere espressa come:

$$W_T = k S (T_1 - T_2) \quad (\text{a2-1})$$

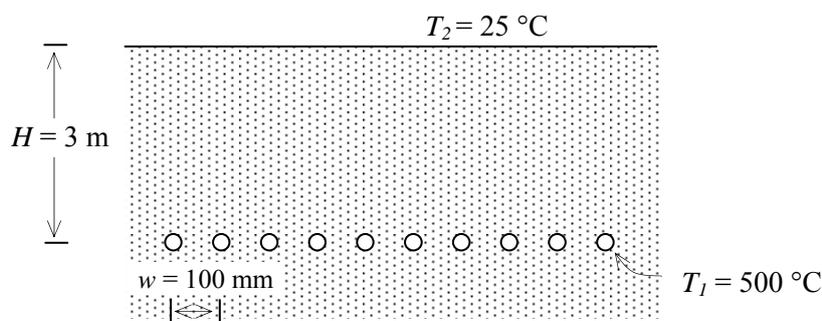
dove  $S$ , detto *fattore di forma conduttivo*, dipende solo dalla geometria del corpo. Esso ha le dimensioni di una lunghezza e la sua espressione analitica è generalmente riportata nei testi di trasmissione del calore per differenti configurazioni geometriche che possono incontrarsi nella pratica. Alcuni esempi sono riportati nella Tab.A2, tratta dal testo di Y.A. Cengel.

In questo caso la *resistenza termica*, è data da:

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{1}{k S} \quad (\text{a2-2})$$

### ESEMPIO

Un dittatore mediorientale ribelle alle disposizioni internazionali ha nascosto nel sottosuolo un fascio di barrette radioattive di lunghezza  $L = 1$  m e di diametro  $D = 10$  mm. Esse sono interrate nel suolo parallelamente una all'altra ad una profondità  $H = 3$  m, come mostrato in figura, ed il passo è  $w = 100$  mm. La conducibilità termica del suolo  $k = 0.9$  W/(m K). Se la temperatura superficiale delle barrette e del suolo valgono rispettivamente  $T_1 = 500$  °C e  $T_2 = 25$  °C, determinare la potenza termica scambiata da ciascuna di esse.

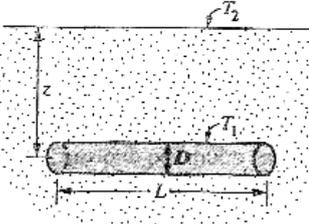
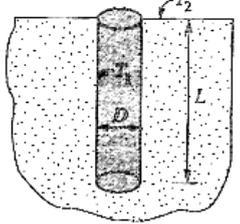
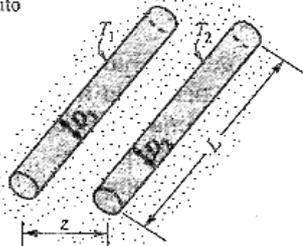
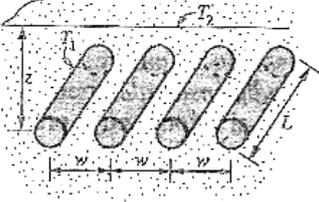
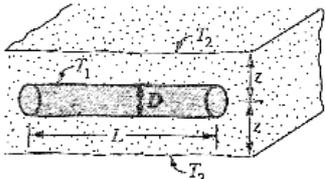
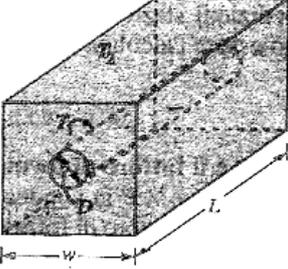
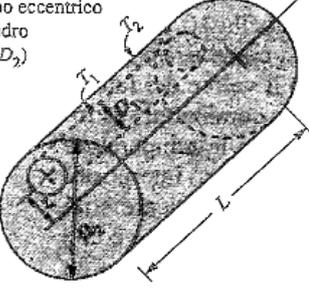
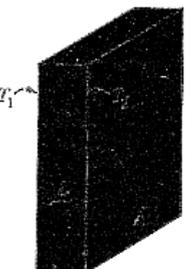


La potenza termica scambiata può essere determinata sfruttando l'eq.(a2-1) dove  $S$  è l'appropriato fattore di forma conduttivo che in questo caso vale:

$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2w}{\pi D} \sinh \frac{2\pi H}{w}\right)} = 0.076 \text{ m}$$

La potenza termica persa da ogni singola barretta vale quindi:  $W_i = k S (T_1 - T_2) = 32.5$  W

□

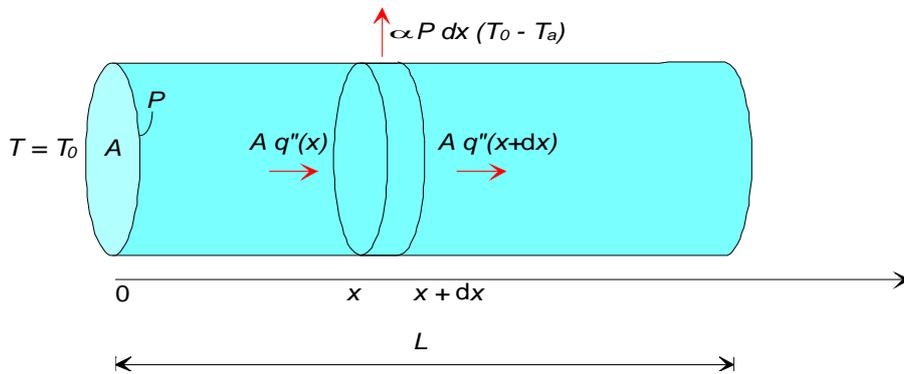
<p>(1) Cilindro isoterma di lunghezza <math>L</math> interrato in un mezzo semi-infinito (<math>L \gg D</math> e <math>z &gt; 1.5D</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$ 	<p>(2) Cilindro verticale isoterma di lunghezza <math>L</math> interrato in un mezzo semi-infinito (<math>L \gg D</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$ 
<p>(3) Due cilindri paralleli isotermi immersi in un mezzo infinito (<math>L \gg D_1, D_2, z</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)}$ 	<p>(4) Una fila di cilindri paralleli equidistanti isotermi interrati in un mezzo semi-infinito (<math>L \gg D, z</math> e <math>w &gt; 1.5D</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2w}{\pi D} \sinh \frac{2\pi z}{w}\right)}$ <p>(per cilindro)</p> 
<p>(5) Cilindro circolare isoterma di lunghezza <math>L</math> nel piano medio di una parete infinita (<math>z &gt; 0.5D</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$ 	<p>(6) Cilindro circolare isoterma di lunghezza <math>L</math> al centro di una barra quadra solida della stessa lunghezza</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(1.08w/D)}$ 
<p>(7) Cilindro circolare isoterma eccentrico di lunghezza <math>L</math> in un cilindro di uguale lunghezza (<math>L &gt; D_2</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D_1^2 + D_2^2 - 4z^2}{2D_1 D_2}\right)}$ 	<p>(8) Ampia parete piana</p> $S = \frac{A}{L}$ 

**Tabella A2:** Fattori di forma conduttivi, (tratto da Y.A. Cengel, cap. 10, Tab. 10.7).

### Appendice 9-3 – Lo scambio termico attraverso superfici alettate

Se il gradiente di temperatura in un solido è molto alto lungo la direzione  $x$ , rispetto al gradiente lungo le altre due direzioni, e se ci si trova in condizioni stazionarie è possibile considerare la temperatura funzione della sola coordinata  $x$ . Questo caso si presenta in genere nelle *alette* che rivestono le superfici al fine di aumentare lo scambio termico.

Consideriamo quindi l'aletta mostrata in Fig.A2-1, ovvero un solido prismatico (a sezione costante  $A$ , il cui perimetro è  $P$ ): in essa il calore entrante per conduzione attraverso la sua base (ad  $x = 0$ ), che è in contatto con la superficie riscaldata, viene dissipato per convezione dalla superficie laterale verso l'ambiente a temperatura  $T_a$  con un coefficiente di scambio termico  $\alpha$ .



**Figura A3-1:** schematizzazione di un'aletta sottile a sezione costante

Dal bilancio di energia per il disco di spessore  $dx$  in corrispondenza alla posizione assiale  $x$  si ottiene la seguente espressione

$$A q''(x) - A q''(x+dx) = \alpha P dx [T(x) - T_a] \quad (\text{a3-1})$$

che indica come la differenza tra il calore che entra dalla faccia di destra per conduzione e quello che esce, sempre per conduzione, dalla faccia di sinistra del disco è pari al calore smaltito per convezione dalla superficie laterale. Il flusso termico conduttivo  $q''$  è dato da

$$q'' = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_x \quad (\text{a3-2})$$

e quindi sviluppando in serie di Taylor

$$q''(x+\Delta x) - q''(x) = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\Delta x} + k \left. \frac{dT}{dx} \right|_x = -k \left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_x dx \quad (\text{a3-3})$$

Da cui sostituendo nell'eq.(a3-1) si ottiene

$$k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} dx = \alpha P dx [T(x) - T_a] \quad (\text{a3-4})$$

Se si introduce la nuova variabile  $\theta(x) \equiv T(x) - T_a$  e si elimina  $dx$  si ottiene:

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} = \frac{\alpha P}{Ak} \theta(x) \quad (\text{a3-5})$$

ovvero

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} - m^2 \theta(x) = 0, \quad m^2 \equiv \frac{\alpha P}{k A} \quad (\text{a3-6})$$

che rappresenta la tipica equazione differenziale per alette di sezione trasversale costante. Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione generale ha, come è noto, la forma

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (\text{a3-7})$$

Per ottenere la soluzione particolare sono necessarie due condizioni al contorno. La prima, abbastanza ovviamente, consiste nell'imporre la temperatura alla base dell'aletta

$$\theta(x=0) = \theta_0 = T_0 - T_a \quad (\text{a3-8})$$

Per la seconda condizione sono possibili diverse alternative (v. ad es. Incropera, cap.3). Ci limiteremo a considerare il caso in cui la superficie estrema dell'aletta, a  $x = L$ , scambia una quantità di calore trascurabile, per cui può ritenersi adiabatica e quindi

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (\text{a3-9})$$

Con l'ipotesi aggiuntiva di aletta molto lunga (si può dimostrare che essa si verifica quando  $mL > 3$ , v. Incropera) la soluzione particolare cercata si semplifica in

$$\theta(x) = \theta_0 e^{-mx}; \quad T(x) = T_0 + (T_0 - T_a) e^{-mx} \quad (\text{a3-10})$$

e la potenza termica asportata dall'aletta, pari a quella che attraversa la sua base a  $x = 0$ , è

$$W_T = q'' A = -k A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = k A m (T_0 - T_a) = \sqrt{k A P \alpha} (T_0 - T_a) \quad (\text{a3-11})$$

Si definisce *efficacia dell'aletta*,  $\varepsilon_a$ , il rapporto tra la potenza termica asportata dall'aletta e quella che fluirebbe per convezione dalla base in sua assenza, ovvero

$$\varepsilon_a = \frac{q'' A}{\alpha A (T_0 - T_a)} \quad (\text{a3-12})$$

Nel nostro caso si ha

$$\varepsilon_a = \frac{\sqrt{k A P \alpha} (T_0 - T_a)}{\alpha A (T_0 - T_a)} = \sqrt{\frac{k P}{\alpha A}} \quad (\text{a3-13})$$

Affinché sia conveniente installare un'aletta, l'efficacia deve essere notevolmente superiore ad uno. Si vede chiaramente che, a parità di altri fattori, l'efficacia aumenta al diminuire di  $\alpha$ : per questa ragione le superfici esposte all'aria (basso  $\alpha$ ) sono frequentemente allettate, mentre quelle esposte all'acqua non lo sono quasi mai.

Si definisce *efficienza dell'aletta*,  $\eta_a$ , il rapporto tra la potenza termica asportata dall'aletta e quella massima asportabile, che si avrebbe nel caso in cui tutta la superficie *laterale* dell'aletta si trovasse alla stessa temperatura della base,  $T_0$ . Essa è pertanto data da

$$\eta_a = \frac{W_T}{W_{T,\max}} = \frac{-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}}{\alpha A_{al} (T_0 - T_a)} = \frac{-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}}{\alpha PL (T_0 - T_a)} \quad (\text{a3-14})$$

Dove  $A_{al} = PL$  rappresenta l'area *laterale* dell'aletta. Nel nostro caso

$$\eta_a = \frac{\sqrt{k A P \alpha} (T_0 - T_a)}{P L \alpha (T_0 - T_a)} = \frac{\sqrt{k A}}{P \alpha} \frac{1}{L^2} = \frac{m^2}{L^2} \quad (\text{a3-15})$$

La eq.(a3-15) mostra quali sono i limiti della superficie alettata: via via che ci si allontana dalla base, la temperatura dell'aletta deve diminuire perché il calore possa fluire per conduzione all'interno di essa; ma tale diminuzione di temperatura implica anche una riduzione dello scambio termico per convezione e quindi una riduzione di efficienza dell'aletta.

E' evidente che per funzionare bene un'aletta deve essere fatta di un materiale che sia *un buon conduttore termico* e deve essere *sottile*, in modo che il rapporto  $P/A$  diminuisca. L'eq.(a3-15) mostra anche che a parità di altri fattori le alette hanno maggiore efficienza quando il coefficiente di scambio è basso. Anche per tale ragione vengono frequentemente alettate le superfici esposte all'aria e non quelle esposte a fluidi che consentono alti coefficienti di scambio termico convettivo visto che, in quest'ultimo caso, raramente si raggiungono condizioni di buona efficienza; in ogni caso le alette per liquidi sono molto tozze e per esse l'approssimazione unidimensionale da noi fatta non sempre è valida.

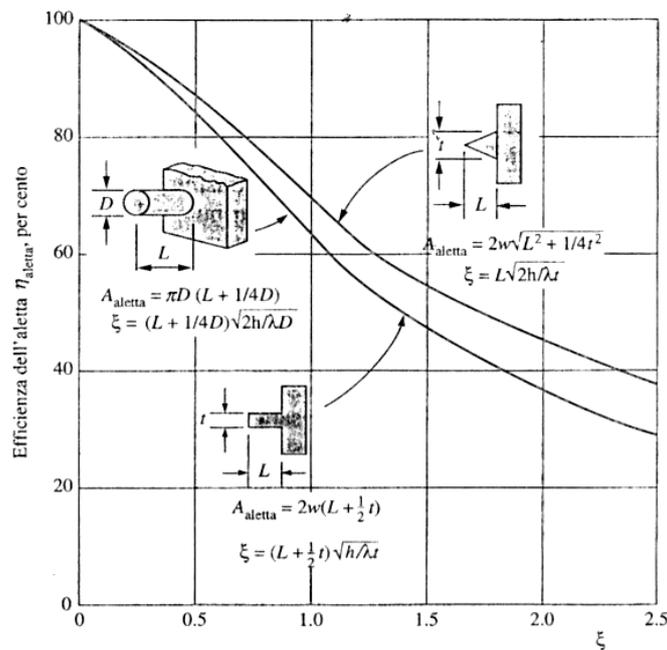


Figura A3-2: Efficienza di un'aletta (tratto da Y.A. Cengel, cap. 10)

L'eq.(a3-15) fornisce anche una semplice ed importante relazione per calcolare il calore smaltito da un'aletta

$$W_T = \eta_a \alpha P L (T_0 - T_a) = \eta_a \alpha A_{al} (T_0 - T_a) \quad (\text{a3-16})$$

Nei casi più complessi (condizioni al contorno diverse da quelle da noi adottate, alette di sezione non costante) la eq.(a3-16) rimane comunque applicabile e l'efficienza dell'aletta è riportata in diagrammi in funzione di un opportuno parametro adimensionale  $\xi$  (v. Fig.A3-2). A questo punto siamo in grado di calcolare l'*efficienza termica di una superficie alettata*, che supponiamo divisa in due parti: una parte  $A_{con}$  ricoperta da alette di efficienza  $\eta_a$ , ed una  $A_{senza}$  (che include gli interstizi tra un'aletta e l'altra) non ricoperta da esse. Supponendo che il coefficiente convettivo  $\alpha$  si mantenga costante su tutta la superficie si ha pertanto

$$W_T = \eta_a A_{con} \alpha (T_0 - T_\infty) + A_{senza} \alpha (T_0 - T_\infty)$$

e la resistenza termica risulta data da

$$R_T = \frac{T_0 - T_\infty}{W_T} = \frac{1}{\eta_a A_{con} \alpha + A_{senza} \alpha} \quad (\text{a3-17})$$

Nella pratica, spesso il secondo termine a denominatore è trascurabile e la resistenza termica si riduce a

$$R_T \cong \frac{1}{\eta_a A_{con} \alpha} \quad (\text{a3-18})$$

## Appendice 9-4 – Il raggio critico di isolamento

Consideriamo un guscio cilindrico di lunghezza  $L$  molto maggiore del raggio, e di raggio interno  $R_i$  ed esterno  $R_e$  e di conducibilità termica  $k$ . Al raggio interno è specificato il valore della temperatura  $T_i$ . Al raggio esterno imponiamo invece una condizione di scambio convettiva (coefficiente di scambio  $\alpha$ ) con un fluido a temperatura  $T_a$ .

Determiniamo la resistenza termica del sistema, secondo l'espressione classica

$$R_T = \frac{T_i - T_a}{W_T} \quad (\text{a4-9.1})$$

Tenuto conto che abbiamo due resistenze termiche (una conduttiva ed una convettiva) in serie, e facendo riferimento ai valori della resistenza termica riportati in Tab.12-5, abbiamo che la resistenza termica equivalente è data da

$$R_T = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi k L} + \frac{1}{A_e \alpha} = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi k L} + \frac{1}{2\pi R_e L \alpha} \quad (\text{a4-9.2})$$

Andiamo ora ad analizzare come varia questa resistenza al variare di  $R_e$ . Risulta chiaro che il primo termine (quello conduttivo) aumenta al crescere di  $R_e$ , mentre il secondo invece è decrescente. La resistenza termica (v. Fig.A4-1) presenterà quindi un *minimo* per un valore di  $R_e$  (che può essere facilmente determinato derivando la precedente espressione rispetto ad  $R_e$  e eguagliando a zero) pari a

$$R_{crit} = \frac{k}{\alpha} \quad (\text{a4-9.3})$$

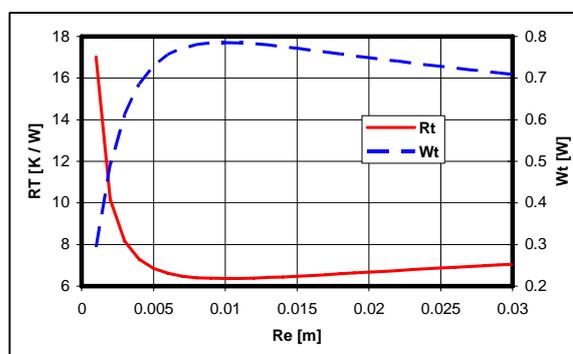


Fig.A4-1

In corrispondenza di tale valore del raggio esterno, la potenza termica scambiata, a parità di temperature imposte agli estremi del sistema, avrà un *massimo*.

Quando si vuole isolare termicamente un cilindro, può quindi succedere paradossalmente che, aumentando lo spessore del guscio di isolante, lo scambio termico aumenti invece di diminuire. La spiegazione fisica è facilmente intuibile: se da un lato l'aumento di spessore dell'isolante fa aumentare la resistenza termica conduttiva, dall'altro aumenta anche la superficie di scambio esposta all'azione convettiva del fluido esterno. Nella pratica, dato che  $\alpha$  al minimo vale circa  $10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  e  $k$  per materiali isolanti è generalmente minore di 1,  $R_{crit}$  vale al massimo circa 10 cm, quindi il problema si pone unicamente per isolamenti di raggio molto piccolo, quali appunto quelli dei cavi elettrici. Per isolanti di raggio *interno* maggiore, la resistenza termica aumenta monotonamente al crescere del raggio esterno.

## Appendice 9-5 – Trasmissione del calore in condizioni non stazionarie.

Fino a questo momento, abbiamo considerato la trasmissione del calore in *condizioni stazionarie*. Il concetto di resistenza termica, o del suo reciproco, la conduttanza di parete, permette di risolvere agevolmente tali problemi. Nell'esempio che segue, affronteremo invece un semplice caso di *transitorio termico*.

### ESEMPIO 9.11 - Studio semplificato della tempra di un cilindro metallico.

Un cilindro di acciaio al carbonio ( $c_p = 434 \text{ J/kg K}$ ,  $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$ ) di diametro  $D = 10 \text{ mm}$  e lunghezza  $L = 40 \text{ mm}$ , inizialmente alla temperatura uniforme  $T_0 = 1200 \text{ }^\circ\text{C}$ , viene gettato in un bagno di tempra alla temperatura  $T_a = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Si può considerare che il bagno si mantenga a temperatura costante (capacità termica infinita) e che il coefficiente di convezione, anch'esso costante, valga  $\alpha = 20\,000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Determinare dopo quanto tempo il cilindro raggiunge la temperatura di  $300 \text{ }^\circ\text{C}$ .

 La soluzione è riportata nel file C2TEMPRA.XLS

In questo caso dobbiamo trattare un problema di transitorio. Il cilindro può essere considerato un sistema chiuso, e possiamo adottare le seguenti ipotesi:

- il lavoro scambiato con l'esterno (dovuto unicamente alla variazione di volume del cilindro) può decisamente essere trascurato (in altri termini, il materiale può essere considerato indilatabile);
- se il materiale è indilatabile,  $c_p = c_v = c$ ;
- la temperatura all'interno del cilindro può essere ritenuta uniforme (ovvero indipendente da  $z$  ed  $r$ ): una giustificazione accurata di tale ipotesi esula dagli scopi del corso, ma si può intuire che la elevata differenza di temperatura tra interno ed esterno (dovuta alla elevata "resistenza termica" alla superficie) rende trascurabili le disuniformità di temperatura all'interno del corpo (dove la corrispondente "resistenza termica" è minore).

In tali condizioni l'equazione di bilancio dell'energia (I principio della t.d.) può essere scritta come

$$\frac{dU}{dt} = W_T$$

ricordando che

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= M \frac{du}{dt} = \rho V \frac{du}{dt} \\ \frac{du}{dt} &= c \frac{dT}{dt} \quad (\text{materiale indilatabile}) \\ W_T &= -\alpha A (T(t) - T_a) \end{aligned}$$

si ottiene infine il problema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} \rho V c \frac{dT}{dt} = -\alpha A (T(t) - T_a) \\ T(t=0) = T_0 \end{cases}$$

Il problema può essere riarrangiato in una forma più generale introducendo le due grandezze ausiliarie  $\Theta$  (theta) e  $\tau$  (tau)

$$\begin{cases} \tau = \frac{\rho V c}{\alpha A} \\ \Theta = T(t) - T_a \end{cases}$$

$\tau$  [s] è detta costante di tempo, per motivi che appariranno evidenti nel seguito. Sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\Theta}{\tau} \\ \Theta(t=0) = \Theta_0 = T_0 - T_a \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$\Theta(t) = \Theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Nel caso in esame si ha quindi

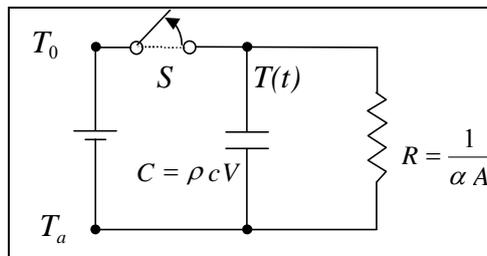
$$V = \frac{\pi D^2}{4} L = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$A = \pi D L + 2 \frac{\pi D^2}{4} = 0.00141 \text{ m}^2$$

$$\tau = \frac{\rho c V}{\alpha A} = \frac{7830 \cdot 434}{20000} \cdot 0.0022 = 0.378 \text{ s}$$

$$t = \tau \ln\left(\frac{\Theta_0}{\Theta}\right) = 0.378 \ln\left(\frac{1200-25}{300-25}\right) = 0.55 \text{ s}$$

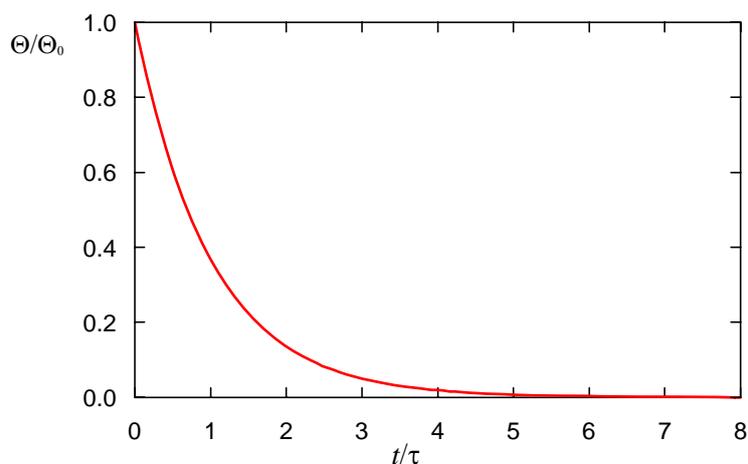
L'esempio trattato costituisce un caso di *sistema dinamico del primo ordine* (in quanto governato da una equazione differenziale del primo ordine). Molti altri sistemi fisici si comportano secondo questo modello: ad esempio, la carica e scarica di un condensatore in un circuito RC (v. Fig.5), od il riempimento di una vasca che ha una perdita proporzionale al livello di liquido in essa. Non è difficile verificare che, sebbene in teoria il transitorio si estingua in un tempo infinito (il cilindro impiega un tempo infinito a raggiungere la temperatura del bagno) in pratica esso può essere considerato concluso dopo un intervallo pari a 4-5 costanti di tempo. Questo è ben visibile anche nel grafico di Fig.6 che rappresenta l'andamento di  $\Theta/\Theta_0$  (che varia dal valore iniziale 1 a quello asintotico finale 0) in funzione di  $t/\tau$ .



**Figura A5-1:** Rete elettrica equivalente al fenomeno di tempra di un cilindro metallico. al tempo  $t = 0$  viene aperto l'interruttore S.

E' noto che affinché il pezzo si tempri il transitorio deve essere il più veloce possibile; dall'esame dell'espressione della costante di tempo  $\tau$  si vede che essa diviene più piccola (e quindi il transitorio si accorcia) se

- $\alpha$  aumenta: per questo spesso si ricorre a fluidi che scambiano più efficacemente o all'agitazione del bagno (convezione forzata);
- il rapporto  $V/A$  diminuisce: tale rapporto è minore per pezzi sottili rispetto a quelli tozzi (è massimo nella sfera, che ha la minor superficie a parità di volume) e non è difficile verificare che per corpi geometricamente simili cresce all'aumentare di  $V$ .
- Inoltre si vede ovviamente che il transitorio è tanto più rapido quanto è minore la capacità termica  $\rho c V$  del corpo



**Figura A5-2.** Andamento della temperatura adimensionalizzata in funzione del tempo adimensionalizzato.



## ESERCIZI

### ESERCIZIO 9.1

Consideriamo una parete di laterizio di spessore  $s=0.25$  m. Il laterizio ha una conducibilità pari a  $0.5$  W/mK. Tale parete separa due ambienti, a temperatura  $T_i$  e  $T_e$  pari rispettivamente a  $20$  °C e  $0$ °C. Supposto che i coefficiente di scambio termico lato esterno e lato interno siano  $\alpha_i = 10$  W/m<sup>2</sup> K e  $\alpha_e = 25$  W/m<sup>2</sup> K, calcolare:

- la conduttanza della parete
  - il flusso termico scambiato
  - le temperature delle due estremità della parete
- [a]  $1.56$  W/m<sup>2</sup> K; b)  $31.25$  W/m<sup>2</sup>; c)  $16.9$  °C,  $1.25$  °C]

### ESERCIZIO 9.2

L'involucro di un frigorifero si può considerare un parallelepipedo di dimensioni  $L \times P \times H = 0.6 \times 0.6 \times 1.5$  m. La parete è costituita da uno strato di schiuma espansa di spessore  $s_1 = 3$  cm e di conducibilità termica  $k_1 = 0.05$  W/m K, ricoperto da una lamiera in acciaio di spessore  $s_2 = 0.5$  mm e di conducibilità termica  $k_2 = 40$  W/m K. La base del frigorifero si può considerare adiabatica. Le altre pareti hanno un coefficiente di convezione interno  $\alpha_i = 3$  W/m<sup>2</sup> K e uno esterno  $\alpha_e = 10$  W/m<sup>2</sup> K. La temperatura interna all'ambiente vale  $T_A = 20$  °C e quella interna vale  $T_i = -25$  °C. Trascurando l'effetto degli spigoli, valutare la potenza termica che è necessario asportare tramite la macchina frigorifera in condizioni di regime per compensare l'afflusso di calore attraverso le pareti stesse

[171 W] (NOTA: questa costituisce solo un'aliquota della potenza del frigorifero, dato che ulteriore potenza è necessaria per refrigerare i cibi introdotti a temperatura ambiente e per compensare gli afflussi di aria calda dovuti alle aperture dello sportello).

### ESERCIZIO 9.3

Una parete in muratura di dimensioni  $4 \times 3$  m reca al centro una finestra di  $1.5 \times 1$  m. Il materiale della parete, che si può considerare omogeneo, ha uno spessore  $s_1 = 12$  cm ed una conducibilità termica  $k_1 = 0.5$  W/m K. La finestra, in vetro, ha uno spessore  $s_2 = 2$  mm ed una conducibilità termica  $k_2 = 1.1$  W/m K. Il coefficiente di convezione interno vale  $\alpha_i = 5$  W/m<sup>2</sup> K e quello esterno vale  $\alpha_e = 15$  W/m<sup>2</sup> K. Entrambi i coefficienti sono stati già corretti per tenere conto dell'irraggiamento. La temperatura interna all'ambiente vale  $T_I = 20$  °C e quella esterna vale  $T_E = 5$  °C. Nell'ipotesi che la parete si possa considerare piana ed infinita, in modo che la temperatura in essa vari solo con lo spessore, determinare la potenza termica scambiata attraverso la medesima e le percentuali di detta potenza scambiate attraverso il muro ed attraverso la finestra.

[395 W, di cui il 21 % attraverso la finestra]

### ESERCIZIO 9.4

La superficie di sabbia di una spiaggia riceve dal sole in una giornata estiva una potenza  $W_{irr} = 400$  W/m<sup>2</sup>, che viene integralmente assorbita da essa. Il coefficiente di scambio termico con l'aria soprastante (corretto per tener conto dell'irraggiamento) vale  $\alpha = 15$  W/m<sup>2</sup> K e la temperatura dell'aria esterna vale  $T_A = 35$  °C. Calcolare la temperatura a cui si porta la sabbia in condizioni di regime. Ripetere il calcolo per una superficie che, essendo opportunamente verniciata, rinvia senza assorbire il 90% della potenza solare incidente.

NOTA: Trascurare lo scambio termico conduttivo tra la superficie ed il sottosuolo.

[61 °C; 38 °C]

### ESERCIZIO 9.5

Il tetto di una baracca in lamiera, di dimensioni  $P \times L = 4 \times 3.5$  m, è costituito da un lamierino di acciaio di spessore  $s_1 = 1.5$  mm e di conducibilità termica  $k_1 = 40$  W/m K. Il coefficiente di convezione interno vale  $\alpha_I = 5$  W/m<sup>2</sup> K e quello esterno vale  $\alpha_E = 15$  W/m<sup>2</sup> K (entrambi i coefficienti sono stati già corretti per tenere conto dell'irraggiamento). La temperatura interna all'ambiente vale  $T_I = 20$  °C e quella esterna vale  $T_E = 5$  °C. Valutare la potenza termica scambiata attraverso il tetto. Determinare quale spessore,  $s_2$ , di conducibilità termica  $k_2 = 0.05$  W/m K debba essere posto sul tetto per ridurre del 90% tale potenza.  
[787 W; 12 mm]

### ESERCIZIO 9.6

Si calcoli la spessore di lana di vetro isolante ( $k = 0,03$  W/m K) necessario affinché la temperatura della superficie esterna di un forno da cucina non sia maggiore di 50 °C. Un termostato garantisce che la temperatura dell'aria interna del forno non superi  $T_I = 300$  °C, la temperatura dell'ambiente esterno vale  $T_E = 14$  °C e il coefficiente di convezione tra la parete del forno e l'ambiente circostante (sia interno che esterno) è  $\alpha_E = \alpha_I = 10$  W/m<sup>2</sup> K. (Sugg. Si può trascurare il contributo delle pareti metalliche del forno stesso).  
[17.8 mm]

### ESERCIZIO 9.7

In una barra cilindrica di un materiale metallico del diametro di 3 cm è presente una generazione volumetrica di calore pari a  $q_s = 10^6$  W/m<sup>3</sup> che supponiamo uniformemente distribuita. La barra è lambita da un gas alla temperatura  $T_a = 30$  °C con coefficiente di scambio termico  $\alpha = 100$  W/m<sup>2</sup>K (convezione forzata). Calcolare:

- la temperatura superficiale  $T_p$  della barra;
- la potenza termica ceduta dal gas per unità di lunghezza.

[a) 105 °C; b) 707 W/m]

### ESERCIZIO 9.8

Una barra di rame di un conduttore elettrico, di spessore  $t = 1$  cm, di altezza  $H$  e di lunghezza  $L$  molto maggiore delle due dimensioni precedenti, è percorsa da una corrente in bassa tensione di 5000 A. La potenza dissipata in essa è data, come è noto, da  $W = RI^2$ , dove  $R = \rho L / t H$  è la resistenza elettrica della barra e la resistività elettrica del rame vale  $\rho = 0.017$  μOhm m. Il coefficiente di scambio termico con l'aria circostante (corretto per tener conto dell'irraggiamento) vale  $\alpha = 10$  W/m<sup>2</sup> K e la temperatura dell'aria esterna vale  $T_A = 20$  °C. Calcolare quale altezza deve avere la barra affinché la sua temperatura superficiale non superi i 40 °C.

[0.32 m]

### ESERCIZIO 9.9

Una certa quantità di carbone giace disposta in posizione orizzontale su una superficie. Lo spessore dello strato di carbone è di 2 metri. Tale letto genera una quantità volumetrica di calore pari a 20 W/m<sup>3</sup>. La temperatura del carbone è uniforme.

La temperatura dell'ambiente  $T_\infty$  è pari a 25 °C e il coefficiente di scambio termico tra la massa di carbone e il gas è pari a 5 W/m<sup>2</sup> K. Calcolare la temperatura della superficie superiore della massa di carbone. Si consideri la superficie inferiore isolata.

[33 °C]

**ESERCIZIO 9.10**

Una resistenza da scaldabagno ha la forma di un cilindro di lunghezza  $L = 600$  mm e diametro  $D = 20$  mm. In condizioni normali essa dissipa una potenza  $W = 1$  kW, stando sommersa in acqua alla temperatura  $t_l = 20$  °C, avente un coefficiente di scambio convettivo di  $h_w = 800$  W/m<sup>2</sup> K.

- a) Quale è la temperatura a regime della superficie esterna della resistenza? (Si trascuri il calore dissipato dalle basi del cilindro).  
b) Quale è il valore della temperatura della superficie esterna a regime se viene a mancare l'acqua e la resistenza viene a trovarsi in aria a 20 °C con coefficiente di convezione  $h_a = 20$  W/m<sup>2</sup> K? (Si supponga di poter trascurare anche l'effetto dell'irraggiamento).

[a)  $T = 53.2$  °C, b)  $T = 1346$  °C] (NOTA: in questo secondo caso il risultato abbastanza irrealistico è indice del fatto che in realtà la resistenza brucia).

**ESERCIZIO 9.11 (adatto alla soluzione tramite calcolatore)**

Con riferimento all'esercizio precedente, se la resistenza ha una massa  $M = 100$  g e un calore specifico  $c = 700$  J/kg K

- a) stimare la durata del transitorio, ovvero il tempo che trascorre da quando viene a mancare l'acqua e quando la resistenza raggiunge una temperatura molto vicina al valore di regime. (Sugg.: porla uguale a cinque costanti di tempo).

Supponendo che la resistenza bruci alla temperatura di 700 °C, valutare il tempo necessario a raggiungere tale temperatura nei seguenti casi:

1.  $h_a = 20$  W/m<sup>2</sup> K
2.  $h_a = 40$  W/m<sup>2</sup> K
3.  $h_a = 100$  W/m<sup>2</sup> K

[ 1) ~ 450 s]